日本行動計量学会第30回大会
於　多摩大学（多摩市）　2002.9.19-21
OHP資料

因子分析と成分分析の
どちらがより安定しているか
―直積構造を持つある斜交解の解析的結果―

小樽商科大学　小笠原　春彦

１．モデル

・斜交因子モデル

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda\Phi\Lambda}' + \psi \mathbf{I}_q, \quad (\psi > 0),$$

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{1}_p & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_p & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1}_p \end{bmatrix}, \ (\lambda > 0),$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & & \phi \\ & \ddots & \\ \phi & & 1 \end{bmatrix}, \ (0 < \phi < 1)$$

・別の表現（*r*:因子数，*q=pr*）

$$\Phi = r\phi \frac{\mathbf{1}_r}{\sqrt{r}} \frac{\mathbf{1}_r'}{\sqrt{r}} + (1-\phi)\mathbf{I}_r,$$

$$\Lambda\Phi\Lambda' = \Phi \otimes \left(p\lambda^2 \frac{\mathbf{1}_p}{\sqrt{p}} \frac{\mathbf{1}_p'}{\sqrt{p}} \right)$$

２．パラメータ間の関連

・$\Lambda\Phi\Lambda'$の最大固有値：$p\lambda^2(1+(r-1)\phi)$

他の０でない固有値：$p\lambda^2(1-\phi)$

・Σの大きい方から *r* 個までの固有値

$$m_1 = p\lambda^2(1+(r-1)\phi)+\psi = p\tilde{\lambda}^2(1+(r-1)\tilde{\phi})$$

$$m_2 = \ldots = m_r = p\lambda^2(1-\phi)+\psi = p\tilde{\lambda}^2(1-\tilde{\phi})$$

$\tilde{\lambda}, \tilde{\phi}$：母成分負荷，母成分相関

・$\tilde{\phi} = \dfrac{\phi}{1+\dfrac{\psi}{p\lambda^2}} < \phi$，$\tilde{\lambda} = \sqrt{\lambda^2 + \dfrac{\psi}{p}} > \lambda$

$$\tilde{\lambda}^2\tilde{\phi} = \lambda^2\phi$$

・推定量

$$\hat{\lambda}=\sqrt{\frac{s_{\mathrm{d}}-\mathrm{tr}\,\mathbf{S}}{rp(p-1)}},\quad \hat{\phi}=\frac{(p-1)\,s_{\mathrm{off}}}{p(r-1)(s_{\mathrm{d}}-\mathrm{tr}\,\mathbf{S})},$$

$$\hat{\psi}=\frac{\mathrm{tr}\,\mathbf{S}}{rp}-\hat{\lambda}^2,$$

$$\hat{\tilde{\lambda}}=\sqrt{\frac{s_{\mathrm{d}}}{rp^2}},\quad \hat{\tilde{\phi}}=\frac{s_{\mathrm{off}}}{(r-1)s_{\mathrm{d}}}$$

$$s_{\mathrm{d}}=\sum_{i=1}^{r}\mathbf{1}_p{}'\mathbf{S}_{ii}\mathbf{1}_p,\quad s_{\mathrm{off}}=\sum_{i\neq j}\mathbf{1}_p{}'\mathbf{S}_{ij}\mathbf{1}_p$$

S_{ij} は S の (i, j) ブロック

３．負荷の推定量の漸近標準誤差

＜ＦＡ＞

補題１．

$$\mathrm{avar}(\hat{\lambda}^2)=\frac{2}{rN}\left\{\lambda^4+\frac{2\lambda^2\psi}{p}+\frac{\psi^2}{p(p-1)}+(r-1)\lambda^4\phi^2\right\}$$

補題１と $\mathrm{ase}(\hat{\lambda})=\mathrm{ase}(\hat{\lambda}^2)/(2\lambda)$ より

命題１．

$$\mathrm{ase}(\hat{\lambda})=\sqrt{\frac{1}{2rN}\left\{\lambda^2+\frac{2\psi}{p}+\frac{\psi^2}{\lambda^2 p(p-1)}+(r-1)\lambda^2\phi^2\right\}}$$

＜ＣＡ＞

補題２．

$$\mathrm{avar}(\hat{\hat{\lambda}}^2) = \frac{2}{r\,N}\left\{\lambda^4 + \frac{2\lambda^2\psi}{p} + \frac{\psi^2}{p^2} + (r-1)\lambda^4\phi^2\right\}$$

命題２．

$$\mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}})$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\,rN\left(1+\frac{\psi}{p\,\lambda^2}\right)}\left\{\lambda^2 + \frac{2\psi}{p} + \frac{\psi^2}{\lambda^2 p^2} + (r-1)\lambda^2\phi^2\right\}}$$

・以上より

$\mathrm{ase}(\hat{\lambda}) > \mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}})$ **（注** $\tilde{\lambda}^2 - \lambda^2 = \psi / p$ **）**，

$$\frac{\lambda}{\mathrm{ase}(\hat{\lambda})} < \frac{\tilde{\lambda}}{\mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}})}, \quad \frac{\hat{\lambda}}{\mathrm{ase}(\hat{\lambda})} < \frac{\hat{\hat{\lambda}}}{\mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}})},$$

$$\frac{\hat{\lambda}}{\mathrm{a\hat{s}e}(\hat{\lambda})} < \frac{\hat{\hat{\lambda}}}{\mathrm{a\hat{s}e}(\hat{\hat{\lambda}})}$$

- $p \to \infty$ のとき

$$\mathrm{ase}(\hat{\lambda}) \text{ と } \mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}}) \quad \to \lambda\sqrt{\frac{1}{2r\,N}(1+(r-1)\phi^2)}$$

- さらに $r \to \infty$ のとき

$$\mathrm{ase}(\hat{\lambda}) \text{ と } \mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}}) \to \frac{\lambda\phi}{\sqrt{2N}}$$

４．相関パラメータの推定量の漸近標準誤差

- 明示的に求められるが複雑

- $p \to \infty$ のとき

$\mathrm{avar}(\hat{\phi})$ と $\mathrm{avar}(\hat{\hat{\phi}})$

$$\to \frac{2}{r(r-1)\,N}\{1+2(r-2)\phi+(r^2-6r+6)\phi^2$$
$$-2(r-1)(r-2)\phi^3+(r-1)^2\phi^4\}$$

- さらに $r \to \infty$ とすると

$$\mathrm{ase}(\hat{\phi}) \text{ と } \mathrm{ase}(\hat{\hat{\phi}}) \to \sqrt{\frac{2}{N}}\ \phi(1-\phi)$$

（最大値は $\phi = 0.5$ とき $1/(2\sqrt{2N})$）

５．その他

- r=1：１因子モデルの場合

$p \to \infty$ のとき

$\mathrm{ase}(\hat{\lambda})$ と $\mathrm{ase}(\hat{\hat{\lambda}}) \to \dfrac{\lambda}{\sqrt{2N}}$

$= \mathrm{ase}(\sqrt{s_{ij}}),\ (i \neq j; i, j = 1, \ldots, p)$

６．シミュレーション

p=3, 9; r=3, 10

λ=0.4, 0.6, 0.8; ϕ=0.3, 0.7 ($\psi = 1 - \lambda^2$)

の 24 の組み合わせ

N=300、繰り返し数 1,000

表１・２（略：表の主な著作権が The Psychometric Society にあり Web 上の公開を禁じているため。ただし、著者に請求して著者が個々に配布することは認めているので、希望する場合は著者に請求のこと。E-mail: hogasa@res.otaru-uc.ac.jp）

７．結論

・採用したモデルの下ではＣＡの方がＦＡより平均的には安定している。

・この差は p が小さい場合により大きい。