システム創成専攻 数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までのうちから２問を選んで，計４問をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ (1) C^2 関数 g に対して定義される $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ の Hesse 行列

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

を g, g', g'' を用いて表せ．ただし $(x,y) \neq (0,0)$ とする．

(2) $g(r) = e^{-r^2}$ に対して上の Hesse 行列 H の固有値 λ_1, λ_2 を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とする．全ての $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して

$$\mathbf{c} \times \mathbf{x} = A\mathbf{x}$$

を満たす 3×3-行列 A を求めよ．

(2) (1) で定まる A に対して，A^2, A^3 を求めよ．

(3) 一般の $n \in \mathbf{N}$ に対して A^n を求めよ．

$\boxed{3}$ A を n 次実正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) 対称行列 $B = {}^tAA$ の固有値はすべて非負であることを示せ．ただし，${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す．

(2) B の最大固有値を λ，最小固有値を μ とすると，

$$\sqrt{\lambda} = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|, \quad \sqrt{\mu} = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n, \|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

となることを示せ．ただし $\|\mathbf{x}\|$ は $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ の標準ノルム：$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ を表す．

$\boxed{4}$ 広義積分

$$I(p,q) = \int_0^\infty x^p \sin x^q \, dx, \quad p \in \mathbf{R}, \ q > 0$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $I(p,q)$ が絶対収束するような p,q の範囲を求めよ．

(2) $I(p,q)$ が条件収束するような p,q の範囲を求めよ．

$\boxed{5}$ 確率関数

$$f(x|\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots\ ; \quad (\lambda > 0)$$

を持つポアソン分布について，次の問に答えよ．

(1) 確率変数 X がこのポアソン分布に従うとき，その平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ．

(2) このポアソン分布に従う無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ に対して，λ の対数尤度関数を

$$\ell_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i|\lambda)$$

とする．そのとき，対数尤度関数の導関数 $\ell_n'(\lambda)$ を $S_n = \ell_n'(\lambda)$ とおくとき，その平均 $E(S_n)$ と分散 $V(S_n)$ を求めよ．

(3) λ の最尤推定量を求め，その平均と分散を求めよ．この場合，最尤推定量は有効推定量であるか答えよ．

$\boxed{6}$ 確率変数 X, Y の同時分布関数は，

$$F(x, y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})(1 + \alpha e^{-x-y}), \quad 0 \le x, y < \infty$$

であるとする．ただし， α は定数で $|\alpha| \le 1$ とする．

(1) X, Y の周辺分布関数 $F_1(x), F_2(y)$ と周辺密度関数 $f_1(x), f_2(y)$ を求めよ．

(2) 同時密度関数 $f(x, y)$ を求めよ．

(3) $X = x$ を与えたときの Y の条件付き密度関数 $f_2(y \mid x)$ を求めよ．

(4) X, Y の平均，分散はそれぞれいくらか． X と Y の相関係数はいくらか．

次の１０問のうちから４問選んで，それぞれ別の解答用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ $0 < a < 1$ とする. 定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a\cos\theta)^3}$$

の値を求めよ.

$\boxed{2}$ $u(x)$ は $[0,1]$ 上の連続関数で最小値が -1 より大きく $\displaystyle\int_0^1 u(x)dx = 0$ とする.
$t \in [0,1]$ に対して,

$$F(t) \;=\; 2\int_0^1 (1 + tu(x))\log(1 + tu(x))\,dx - t^2\left\{\int_0^1 |u(x)|dx\right\}^2$$

と定める.

(1) $F'(t), F''(t)$ を求めよ.

(2) $F''(t) \geq 0$ を示し, $F(t)$ が単調増加関数であることを示せ.

$\boxed{3}$ $a=-2$ または 2 として微分方程式系：

$$(E) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= axy \\ \dot{y} &= x^2 - y^2 \end{cases}$$

を考える．

(1) $F(x,y) = x^{\frac{2}{a}}\left(\dfrac{1}{1+a}x^2 - y^2\right)$ は (E) の $x(0) \neq 0$ である解上で一定であることを示せ．

(2) $a=-2$ のとき $x(0) \neq 0$ であるすべての解が有界であることを示せ．

(3) $a=2$ のとき非自明解はすべて非有界であることを示せ．ただし非自明解とは恒等的に $(0,0)$ でない解をいう．

$\boxed{4}$ n を与えられた自然数とし，実数を成分とする n 次元列ベクトル全体のなすベクトル空間を V とおく．V のベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_n)$ (${}^t\mathbf{a}$ はベクトル $\mathbf{a}$ の転置を表す) に対し $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ でそれらの標準内積

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

を表す．今，V の n 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ に対して，ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}\mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\mathbf{a}_i, \mathbf{u}_j)}{(\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)}\mathbf{u}_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように定めていき，初めて $\mathbf{u}_i$ が零ベクトル $\mathbf{o}$ となる i の値を m とおく．もし，$\mathbf{u}_1$ から $\mathbf{u}_n$ すべてが $\mathbf{o}$ でない場合は $m = n+1$ と定める．このとき次の問いに答えよ．

(1) $m \geq 2$ のとき，ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_{m-1}$ を横に並べた $n \times (m-1)$ 行列

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_{m-1})$$

を考える．このとき ${}^tUU$ は対角成分がすべて正の対角行列になることを示せ．ただし，${}^tU$ は U の転置行列である．

(2) 次の 2 つの条件が互いに同値であることを示せ．

(i) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ が一次独立

(ii) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n$ すべてが $\mathbf{o}$ でない

$\boxed{5}$ n 次元ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n)$ (${}^t\mathbf{x}$ はベクトル $\mathbf{x}$ の転置を表す) の内積を

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

ノルムを $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とし, $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ は定ベクトルとする.

(1) 汎関数

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$$

は下から有界であることを示せ.

(2) 恒等式

$$2J\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right) + \left\|\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right\|^2 = J(\mathbf{x}) + J(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n)$$

が成り立つことを示せ.

(3) $J(\mathbf{x})$ は最小値

$$j = \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} J(\mathbf{x})$$

を達成することを示せ.

$\boxed{6}$ 物体 A, B の重さ a, b を推定したい．ここで，a, b は未知であり，測定は 2 回許されているとする．次の 3 つの測定方式を考える．

：A, B それぞれを単独に測定する．測定値を X_1, X_2 とする．

：A, B の重さの和および差を測定する．測定値を Y_1, Y_2 とする．

：最初に A，次に A, B の重さの和を測定する．測定値を Z_1, Z_2 とする．

ただし，測定に伴う誤差の平均は 0，分散は 1 であり，各測定は独立であるとする．
そのとき，次の問に答えよ．

(1) それぞれの測定方式において，a, b の推定量を求めよ．

(2) (1) で求めた推定量の分散を求め，どの方式が優れているかについて述べよ．

$\boxed{7}$ 正整数 n に対して，区間 $[0,1]$ 上の一様分布 $U(0,1)$ からの奇数 $2n-1$ 個の無作為標本 $X_1,\ldots,X_{2n-1}$ の中央値を $X_{(n)}$ とする．

(1) $n=2$ に対して，$X_{(2)}$ の分布関数 $F_2(x)$ と密度関数 $f_2(x)$ を求めよ．その平均 $E(X_{(2)})$ と分散 $V(X_{(2)})$ を求めよ．

(2) n に対して，$X_{(n)}$ の分布関数 $F_n(x)$ と密度関数 $f_n(x)$ を求めよ．その平均 $E(X_{(n)})$ と分散 $V(X_{(n)})$ を求めよ．

$\boxed{8}$ 平均が $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布を記号 $E_X(\lambda)$ で表すとき，その密度関数は

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad (\lambda > 0)$$

である．そのとき，次の問に答えよ．

(1) 指数分布 $E_X(\lambda)$ からの無作為標本を $X_1,\ldots,X_n$ とするとき，和 $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ は密度関数

$$f_n(s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s}$$

を持つガンマ分布 $G_A(n,\frac{1}{\lambda})$ に従うことを示せ．ただし $\Gamma(x)$ $(x>0)$ はガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

を表す。

(2) 指数分布 $E_X(\frac{1}{\lambda})$ からの無作為標本 $Y_1,\ldots,Y_n$ は $X_1,\ldots,X_n$ と独立とする．その和を $T=\sum_{i=1}^{n} Y_i$ とするとき，(S,T) の同時密度関数 $g(s,t)$ を求めよ．

(3) 確率変数の変数変換

$$\begin{array}{l} U = \sqrt{\frac{T}{S}} \\ W = \sqrt{ST} \end{array} \quad \text{すなわち,} \quad \begin{array}{l} S = \frac{W}{U} \\ T = UW \end{array}$$

を行うとき，(U,W) の同時密度関数 $h(u,w)$ を求めよ．

(4) U の周辺密度関数 $h_1(u)$ を求めよ．また，$U=u$ を与えたときの W の条件付き密度関数 $h_2(w|u)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ p と m を正の整数とする．確率変数 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p, R$ は互いに独立で， $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ はそれぞれ標準正規分布に従い， R は自由度 m のカイ 2 乗分布に従うとする．いま，

$$X_i = \sqrt{\frac{m}{R}} Z_i, \quad i = 1, \ldots, p$$

とおくとき， $(X_1, \ldots, X_p)$ の同時密度関数を求めよ．ここで，自由度 m のカイ 2 乗分布の密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}}} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

である．

$\boxed{10}$ 2 つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma^2)$ と $N(\mu_2, \sigma^2)$ から，それぞれサイズ n の無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ と $Y_1, \ldots, Y_n$ をとり，

$$\begin{array}{ll} \text{帰無仮説} \quad H_0: & \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \text{対立仮説} \quad H_1: & \mu_1 - \mu_2 = \delta \end{array}$$

に対して検定する．ただし， $\sigma^2 > 0,\ \delta > 0$ で既知とする．

(1) 第 1 種の過誤の確率 α と第 2 種の過誤の確率 β を与えたとき， n をどのように定めたらよいか．ただし，標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点を z_α とおく．

(2) 対立仮説を片側仮説として，

$$\begin{array}{ll} \text{帰無仮説} \quad H_0: & \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ \text{対立仮説} \quad H_1: & \mu_1 - \mu_2 \geq \delta \end{array}$$

とするとき，(1) の議論はどのようになるか．

(3) $\sigma = 0.3$ とする．平均に関係する工程を改良し，改良前と改良後の平均値の差を有意水準 0.05 で検定して，もし母平均の間に 0.1 以上の差があれば 80% 以上の確率で検出できるようにしたい．何回の実験を行えばよいか．ただし，$z_{0.05} = 1.645,\ z_{0.2} = 0.842$ である．