$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までのうちから２問を選んで，計４問をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ $x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi,\ x_3 = r\cos\theta\ (r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi)$ を $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ の 極座標表示とする．次の問いに答えよ．

(i) C^2 級関数 $f = f(x)$ は r のみに依存するものとし，$f(x) = g(r)$ と書く．$r > 0$ において

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) f(x) = g''(r) + \frac{2}{r} g'(r)$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $m = 1, 2, \cdots, i = 1, 2, 3$ に対し

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{x_i^2}{r^{m+2}}\right)$$

を求めよ．ただし，$r > 0$ とする．

$\boxed{2}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の特性方程式が重解をもつような a の値を求め，そのときの A のすべての固有値と, 対応する固有ベクトルを求めよ．

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_{n+2} + \lambda a_{n+1} + a_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

をみたすものとする．ただし，λ は実定数である．次の問いに答えよ．

(i) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $N > 1$ を整数とする．$a_0 = a_N = 0$ であり, $a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$ とはならないような $\{a_n\}$ が存在するとき, λ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$，$I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{1 - x^2y^2}$ とおく．変換

$$u = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2y^2}}\right), \qquad v = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2y^2}}\right)$$

は D から $\Delta = \left\{(u, v) \;\middle|\; u > 0, v > 0, u + v < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ への全単射である. 次の問いに答えよ.

(i) x, y を u, v の式で表せ.

(ii) I の値を求めよ.

$\boxed{5}$ 事象 A, B, C とそれらの余事象 A^c, B^c, C^c に対して，記号

$$A_1 = A, \quad A_2 = A^c; \quad B_1 = B, \quad B_2 = B^c; \quad C_1 = C, \quad C_2 = C^c$$

を用いて表現するとき，

$$P(A_i \cap B_j \cap C_k) > 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2;\ k = 1, 2)$$

であると仮定する．任意の事象 W に対して，次の条件付き確率測度

$$\begin{aligned} Q(W) &= P(W|A) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} \\ R(W) &= P(W|A^c) = \frac{P(A^c \cap W)}{P(A^c)} \end{aligned}$$

を定義する．次の問いに答えよ．

(1) $Q(B) = R(B)$ が成り立つとき，事象 A, B はどのような関係にあるか．

(2) 条件付き確率 $P(C|A, B) = \dfrac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$ を $Q(\cdot)$ を用いて表せ．また，条件付き確率 $P(C|A^c, B) = \dfrac{P(A^c \cap B \cap C)}{P(A^c \cap B)}$ を $R(\cdot)$ を用いて表せ．

(3) 次の 2 つの式：

$$\begin{aligned} \frac{P(C|A, B)}{P(C|A^c, B)} &= \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)} \\ \frac{P(C|A, B^c)}{P(C|A^c, B^c)} &= \frac{P(C|A)}{P(C|A^c)} \end{aligned}$$

が成り立つとき，事象 A, B が独立であるか，または，条件付き確率測度 $Q(\cdot)$ に関して事象 B, C が独立であることを証明せよ．

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ．

(1) ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の確率密度関数は次のように定義される：

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,x^{\alpha-1}e^{-x},\quad x>0$$

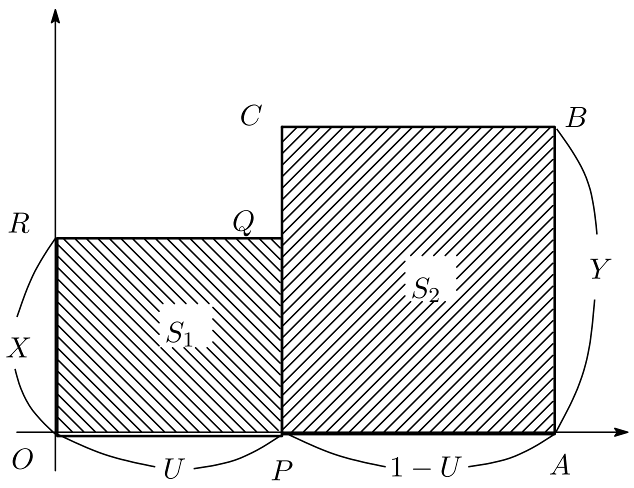
ただし，$\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である：

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad \alpha>0$$

ガンマ分布 $G_A(\alpha,1)$ の平均と分散を求めよ．

(2) U を一様分布 $U(0,1)$ に従う確率変数とする．$U=\alpha$ を与えた下で X,Y は互いに独立な確率変数で，それぞれガンマ分布 $G_A(\alpha,1),G_A(1-\alpha,1)$ に従うとする．

区間 $[0,1]$ 上の点 $O(0,0)$, $P(U,0)$, $A(1,0)$ に対して，OP を底辺とし高さ X の長方形 $OPQR$ と，PA を底辺とし高さ Y の長方形 $PABC$ を考え，それらの面積を S_1,S_2 とする (下図を参照)．このとき，S_1 と S_2 の平均，分散，共分散，相関係数を求めよ．



次の１０問のうちから４問選んで，それぞれ別の解答用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 累次積分を用いて, 重積分

$$\iint_D (x\cos y)\exp\left\{-\frac{x^2(1+y^2)}{2}\right\}dx\,dy$$

の値を求めよ．ただし

$$D = \{(x,y) \mid 0 < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$$

とする．

$\boxed{2}$ $x = x(t)$ は微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = -a + be^x \quad (t \geq 0), \quad x(0) = 0$$

の解とする．ただし a, b は正定数である．次の問に答えよ．

(i) $x(t)$ が存在する範囲で $x(t) \geq -at$ が成り立つことを示せ.

(ii) $\lim_{t\to\infty}(at + x(t))$ が存在するための a, b の条件とその極限値を求めよ.

$\boxed{3}$ n 次正方行列 F, G, H は

$$\begin{array}{lrcl} (a) & HF & = & FH - 2F \\ (b) & GF & = & FG + H \end{array}$$

をみたし，零でないベクトル $\mathbf{v}$ はスカラー h に対し

$$H\mathbf{v} = h\mathbf{v}, \qquad G\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

をみたすものとする．次の問に答えよ．

(i) $j = 0, 1, \cdots$ に対して $HF^j\mathbf{v} = (h - 2j)F^j\mathbf{v}$ が成り立つことを示せ．ただし $F^0 = I$（単位行列）とする．

(ii) $j = 1, 2, \cdots$ に対して $GF^j\mathbf{v} = j(h - j + 1)F^{j-1}\mathbf{v}$ が成り立つことを示せ.

(iii) 適当な $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して, $F^{j_0}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $F^{j_0-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ となることを示せ.

(iv) $h \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ であることを示せ.

$\boxed{4}$ $m = m(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ は正値連続関数で M は正の定数とする．このとき

$$\max_{x \in [0,1]} m(x) \leq M$$

が成り立つことと，任意の連続関数 $f = f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ に対して

$$\int_0^1 m(x)|f(x)|dx \leq M \int_0^1 |f(x)|dx$$

が成り立つことは同値であることを示せ.

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ.

(i) $u(x) = \cot x$ $(0 < x \leq \frac{\pi}{2})$ は

$$u' + u^2 + 1 = 0$$

をみたすことを示せ.

(ii) 絶対連続関数 $f = f(x)$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ が $f(0) = 0$, $f' \in L^2(0, \frac{\pi}{2})$ をみたすとき $|f(x)|^2 = o(x)$ $(x \to 0)$ となることを示せ.

(iii) (ii) の条件をみたす関数 $f(x)$ と $u(x) = \cot x$ に対して

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x)^2 - f(x)^2\}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f'(x) - f(x)u(x)\}^2 dx$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ a を $|a| < 1$ を満たす定数とする．2次元確率ベクトル (X, Y) は密度関数

$$f(x, y) = C \exp\left(-x^2 + 2axy - y^2\right) \quad (-\infty < x, y < \infty)$$

をもつとする．ここで C は定数である．次の問いに答えよ．

(1) 定数 C を求めよ．

(2) X と Y の平均と分散を求めよ．

(3) X と Y の相関係数を求めよ．

$\boxed{7}$ $X_1, \ldots, X_n$ を独立に同じ分布 $F(x)$ に従う n 個の確率変数とし，$F(x)$ は密度関数 $f(x)$ をもつとする．連続する確率変数の組 (X_i, X_{i+1})（ただし $i = 1, \ldots, n-1$）の中で，$X_i < X_{i+1}$ を満たす組の個数を T とする．次の問いに答えよ．

(1) T の平均を求めよ．

(2) T の分散を求めよ．

$\boxed{8}$ 正の値を取る確率変数 T が任意の正の数 t, h に対して次式を満たすとする．

$$P(0 < T < t + h \,|\, T > t) = P(0 < T < h)$$

ここで T は $t > 0$ で連続な密度関数 $f(t)$ をもち

$$\lim_{h \to +0} f(h)$$

が存在すると仮定する．このとき，密度関数 $f(t)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ 確率変数 X に対して積率母関数 $M(t) = E(e^{tX})$ が原点の周りで定義されるとする．X のキュムラント母関数 $\psi(t) = \log M(t)$ の原点におけるテーラー展開を

$$\psi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\kappa_m t^m}{m!}$$

と書き，κ_m を X の m 次キュムラントという．

$X_1, \ldots, X_p$ を互いに独立で原点の周りで積率母関数が定義される確率変数とする．$\psi_j(t)$ を X_j のキュムラント母関数，$\kappa_m^{(j)}$ を X_j の m 次キュムラントとする．a_j $(j = 1, \ldots, p)$ を実定数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sum_{j=1}^{p} a_j X_j$ のキュムラント母関数を a_j と $\psi_j(t)$ を用いて表せ．

(2) $\sum_{j=1}^{p} a_j X_j$ の m 次キュムラントを $\kappa_m(a_1, \ldots, a_p)$ とするとき，$\kappa_m(a_1, \ldots, a_p)$ を求めよ．

(3) $\sum_{j=1}^{p} a_j^2 = 1$ のとき，4 次キュムラントに関する次の不等式を証明せよ．

$$\min\{0, \kappa_4^{(1)}, \ldots, \kappa_4^{(p)}\} \le \kappa_4(a_1, \ldots, a_p) \le \max\{0, \kappa_4^{(1)}, \ldots, \kappa_4^{(p)}\}$$

$\boxed{10}$ 確率変数 X, Y について，X が与えられたときの Y の条件付き分布が平均 βX，分散 σ^2 の正規分布に従うと仮定する．ただし，β, σ^2 は定数で, $|\beta| < 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $E(X) = E(Y)$（$= \mu$ と表す）が成り立つとき，μ を求めよ．

(2) (1) の条件に加えて $E(X^2) = E(Y^2)$（$= \nu$ と表す）が成り立つとき，ν を β, σ^2 を用いて表せ．

(3) (1), (2) の条件に加えて $E(X^4) = E(Y^4)$（$= \kappa$ と表す）が成り立つとき，κ を β, σ^2 を用いて表せ．