システム創成専攻 数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までのうちから 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の解答用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 空間座標 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して (ρ, ϕ, z) （$x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$ ）を円柱座標，(r, ϕ, θ) （$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ ）を極座標とする．滑らかな関数 f に関する次の等式を示せ．ただし $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ である．

(1) 円柱座標に対して $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$.

(2) 極座標に対して $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}\right)$.

$\boxed{2}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に関する以下の問いに答えよ．

(1) A の第 i 列の作る列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とする．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ の順でグラム・シュミットの直交化法を適用することにより, $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底 $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3, \boldsymbol{t}_4$ を求めよ．

(2) (1) の結果を用いて，$A = TU$ となる直交行列 T と上三角行列 U を求めよ．ただし，成分 u_{ij} に対し，$i > j$ ならば $u_{ij} = 0$ が成り立つような正方行列 $U = (u_{ij})$ を上三角行列という．

$\boxed{3}$ $f(t), g(t), h(t)$ は有界連続関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$ が

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \frac{g(t)}{2}\phi_1 + \frac{h(t)+f(t)}{2}\phi_2 \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \frac{h(t)-f(t)}{2}\phi_1 - \frac{g(t)}{2}\phi_2\end{aligned}$$

の解ならば,

$$x(t) = \frac{\phi_1(t)}{\phi_2(t)}$$

は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(t)}{2}\left(1+x^2\right) + g(t)x + \frac{h(t)}{2}\left(1-x^2\right) \tag{A}$$

の解であることを示せ．ただし, $\phi_2(t) \neq 0$ となる t の範囲で考えるものとする．

(2) $f(t) = \cos t$, $g(t) = -1$, $h(t) = -\cos t$ であるとき，初期条件

$$x(0) = 1$$

を満たす (A) の解を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\cos x$ を $x = 0$ のまわりで 5 次までテイラー展開したときの剰余項 R_6 を与えよ．

(2) 次のどちらの方が $\cos 1$ の良い近似であるか, 理由とともに述べよ．　ただし $3.14 < \pi < 3.15$ である．

(i) $x = 0$ で 5 次までテイラー展開して

$$\cos 1 \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24} = 0.54166\ldots$$

とする．

(ii) $x = \pi/3$ で 2 次までテイラー展開して

$$\cos 1 \fallingdotseq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi}{3}\right)^2 \quad = 0.54031\ldots$$

とする．

$\boxed{5}$ 確率変数の列 $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$ は共通の平均と分散

$$E(X_t) = \mu, \quad V(X_t) = \sigma^2, \quad t = 1, 2, \dots$$

をもち, それらの相関係数は, $t = 1, 2, \dots;\ h = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$Corr(X_t, X_{t+h}) = p^h, \quad \text{ただし}, p \text{ は } 0 < p < 1 \text{ なる定数}$$

であるとする．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 標本和 $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$ の平均 $E(S_n)$ と分散 $V(S_n)$ を求めよ.

(2) 標本平均 $\bar{X}_n = S_n/n$ は平均 μ に確率収束する, すなわち, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 次式が成立することを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon\right) = 0$$

$\boxed{6}$ $X_1, X_2 \dots$ をベルヌーイ試行列, すなわち, 各 X_i は互いに独立で, 実数 p $(0 < p < 1)$ に対し

$$X_i = \begin{cases} 1, & (\text{確率 } p) \\ 0, & (\text{確率 } q = 1 - p) \end{cases}$$

とする．以下の問いに答えよ.

(1) 上記のベルヌーイ試行で 0 が r 回生起するまでに観測された 1 の個数を X とする．確率 $P(X = k),\ k = 0, 1, \dots$ を求めよ.

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$ を確かめよ.

(3) 正の定数 λ に対し, $rp = \lambda$ を満たすように $r \to \infty$ としたときの極限

$$\lim_{r\to\infty} P(X = k)$$

を求めよ.

システム創成専攻 数理科学 II

次の１０問のうちから４問選んで，それぞれ別の解答用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ i を虚数単位とし，τ は虚部が正の複素数であるものとする．複素平面全体で正則な z の関数

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau} e^{2\pi i n z}$$

に対し, 以下の問いに答えよ．

(1) 等式

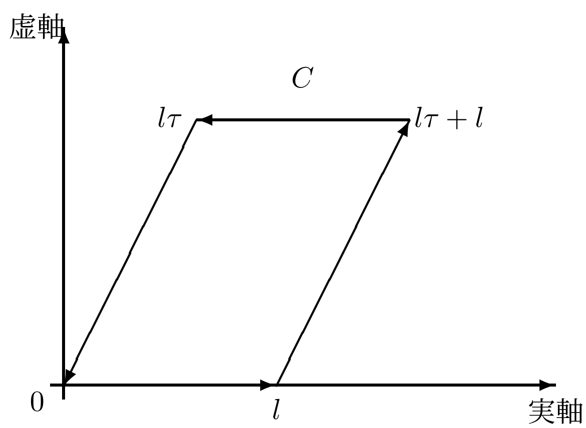
$$\vartheta(z+1) = \vartheta(z)$$
$$\vartheta(z+\tau) = e^{-\pi i \tau} e^{-2\pi i z} \vartheta(z)$$

を示せ．

(2) 積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} dz$$

を計算せよ．ただし，C は正の整数 l に対して, 0，l，$l\tau + l$，$l\tau$ を頂点とする平行四辺形上を正の向きに一周する積分路であり，$\vartheta(z)$ は C 上では 0 とならない．



$\boxed{2}$ $g(t)$, $f(t)$, $K(t)$, $x(t)$ を $t \geq 0$ で定義された非負連続関数とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $S[x](t) = \displaystyle\int_0^t K(s)x(s)ds$ とおくと, $t \geq 0, k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$S^k[x](t) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^t K(s)\left[\int_s^t K(u)du\right]^{k-1} x(s)ds$$

が成り立つことを示せ. ただし, S^k は $S^1[x] = S[x], S^k[x] = S[S^{k-1}[x]]$ $(k = 2, 3, \cdots)$ で帰納的に定義される.

(2) $t \geq 0$ で常に

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t K(s)f(s)ds$$

であるときは, 任意の $t \geq 0$ に対して

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t K(s)\exp\left[\int_s^t K(u)du\right] g(s)ds$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{3}$ n 次の実正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) $|x_1| \leq \cdots \leq |x_n|$ を満たす縦ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o})$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が成り立てば, $|a_{nn}| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} |a_{nj}|$ であることを示せ.

(2) 次の条件 (a) が満たされるとき, 行列 A は正則であることを示せ.

(a)　$i = 1, 2, \cdots, n$ に対して $|a_{ii}| > \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ.

(1) 正の実数 x と実数 y に対して

$$xy \leq x\log x + e^{y-1}$$

であることを示せ.

(2) $f(x)$, $g(x)$ は連続で $x \in (0,a)$ に対して $f(x),\ g(x) > 0$ であり,

$$\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx < \infty, \quad \int_0^a e^{g(x)}dx < \infty$$

を満たすものとすれば

$$\int_0^a f(x)g(x)dx < \infty$$

であることを示せ. ただし, $\log^+ b = \max\{\log b, 0\}$ とする.

(3) (2) の仮定の下では,

$$\int_0^a f(x)\log\frac{1}{x}dx \leq 2\int_0^a f(x)\log^+ f(x)dx + \frac{4\sqrt{a}}{e}$$

であることを示せ.

$\boxed{5}$ 正の実数 t と $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 $f(x)$ に対して, $\mathbb{R}$ 上の関数 $(T_tf)(x)$ を

$$(T_tf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\ y\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

と定義する. 以下の問いに答えよ.

(1) $(T_tf)(x)$ を定義する積分は収束すること, $(T_tf)(x)$ も x の有界連続関数になることを示せ.

(2) 任意の正の実数 t,s および有界連続関数 $f(x)$ に対して $(T_t(T_sf))(x) = (T_{t+s}f)(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ となることを示せ.

(3) f,g を $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数とする. $t > 0$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(T_tf)(x)g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}f(x)(T_tg)(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

を示せ.

$\boxed{6}$ データ $x_1, \ldots, x_n$ に対して度数分布表を作成したところ, 階級数が k, 階級値が $\{c_1, \ldots, c_k\}$, 各階級の度数が $\{f_1, \ldots, f_k\}$, 各階級の幅が $\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$ となった．もとのデータの標本平均, 標本 2 次モーメントを, それぞれ

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

とし，度数分布表から作成した標本平均, 標本 2 次モーメントをそれぞれ $\bar{y}, m_y$ とおく．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\bar{y},\ m_y$ を $c_j,\ f_j\ (j = 1, \ldots, k)$ を用いて表せ.

(2) $|\bar{x} - \bar{y}|$ は高々どれだけとなるかを δ_j だけで表現せよ.

(3) $|m_x - m_y|$ は高々どれだけとなるかを $\bar{y}, \delta_j$ だけで表現せよ.

$\boxed{7}$ 確率変数 X はベータ分布 $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ に従う．すなわち, 確率密度関数

$$p_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

$$\text{ただし}, B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx$$

をもつとする．$X = x$ が与えられているとき, 確率変数 Y は確率 x のベルヌーイ分布に従う, すなわち, $P(Y = 1|X = x) = x,\ P(Y = 0|X = x) = 1 - x$ であるとする.

(1) 確率 $P(Y = 1)$ を求めよ.

(2) $Y = y$ が与えられているとき, X の条件付平均 $E(X|Y = y)$ $(y = 0, 1)$ を求めよ.

$\boxed{8}$ 分布関数 $F(x)$ が確率密度関数 $f(x)$ をもち，任意の x に対して $F(x) < 1$ であるとする．この $F(x)$ について, $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $M(x) = -\log \bar{F}(x)$ とおく．

(1) $\displaystyle\int_0^x se^{su}\,du = e^{sx} - 1$ に注意して, 積率母関数 $m(s) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{su} f(u)\,du$ が次式を満たすことを示せ．

$$m(s) - 1 = -s\int_{-\infty}^{0} F(u)e^{su}\,du + s\int_0^{\infty} \bar{F}(u)e^{su}\,du$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$ を仮定する．このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $c_\epsilon > 0$ が存在して, 任意の $x \geq 0$ に対し,

$$\bar{F}(x) \geq c_\epsilon e^{-\epsilon x}$$

が成立することを示せ．

(3) (2) の仮定の下では, 任意の $s > 0$ に対して $m(s) = \infty$ となることを示せ．

(4) パレート分布 $F(x) = 1 - x^{-\alpha}$ $(x > 1,\ \alpha > 0)$ は, 任意の $s > 0$ に対して $m(s) = \infty$ となることを示せ．

$\boxed{9}$ ポアソン分布 $Po(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ の確率関数は $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $(x = 0, 1, \ldots)$ で与えられる．以下の問いに答えよ．

(1) 二つの確率変数 X_1, X_2 が互いに独立で, それぞれ $Po(\lambda_1)$, $Po(\lambda_2)$ に従うとき, $X_1 + X_2$ は $Po(\lambda_1 + \lambda_2)$ に従うことを示せ．

n を自然数とする．Y_n を $Po(n\lambda)$ に従う確率変数とし, $\bar{Y}_n = Y_n/n$ とおく．

(2) 中心極限定理を用いて, 任意の正の実数 λ と u に対して次式が成立することを示せ．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bar{Y}_n - u\sqrt{\frac{\lambda}{n}} < \lambda < \bar{Y}_n + u\sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

(3) 任意の自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{\lambda\to+0} P(\bar{Y}_n = 0) = 1$ を示せ．

(4) 任意の自然数 n と任意の正の実数 u に対して次式が成立することを示せ．

$$\lim_{\lambda\to+0} P\left(\bar{Y}_n - u\sqrt{\frac{\bar{Y}_n}{n}} < \lambda < \bar{Y}_n + u\sqrt{\frac{\bar{Y}_n}{n}}\right) = 0$$

$\boxed{10}$ 4 つの確率変数 X, Y, Z, U のとりうる値をそれぞれ $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$, $\{u_1, u_2\}$ とする．$i, j, k, l = 1, 2$ に対して，$(X, Y, Z, U) = (x_i, y_j, z_k, u_l)$ である確率を $\mathrm{pr}(x_i, y_j, z_k, u_l)$ と記し，$\mathrm{pr}(x_i, y_j, z_k, u_l) > 0$ を仮定する．$(X, Z, U) = (x_i, z_k, u_l)$ を与えたときの $Y = y_j$ の条件付き確率を $\mathrm{pr}(y_j|x_i, z_k, u_l)$ と記す．他の確率についても同様に記すこととする．X, Y, Z, U が以下の 2 条件を満たすとする．

(a) $(Z, U) = (z_i, u_j)$ $(i, j = 1, 2)$ に対して, $\mathrm{pr}(u_j|z_i) = \mathrm{pr}(u_j)$.

(b) $(X, Y, Z, U) = (x_i, y_j, z_k, u_l)$ $(i, j, k, l = 1, 2)$ に対して,

$$\mathrm{pr}(y_j, z_k|x_i, u_l) = \mathrm{pr}(y_j|x_i, u_l)\mathrm{pr}(z_k|x_i, u_l)$$

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $(X, Y, Z, U) = (x_i, y_j, z_k, u_l)$ $(i, j, k, l = 1, 2)$ に対して,

$$\mathrm{pr}(y_j|x_i, z_k, u_l) = \mathrm{pr}(y_j|x_i, u_l)$$

を示せ.

(2) $Z = z_k$ $(k = 1, 2)$ に対して

$$\mathrm{pr}(x_1, y_1|z_k) \le \sum_{l=1}^{2} \mathrm{pr}(y_1|x_1, u_l)\mathrm{pr}(u_l) \le 1 - \mathrm{pr}(x_1, y_2|z_k)$$

が成り立つことを示せ.

ヒント：$0 \le A, B \le 1$ に対して, $AB \le A \le 1 - B + AB$ が成り立つことを利用せよ.