システム創成専攻 数理科学 I

$\boxed{1}\,\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から２問を選んで，計４問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 関数 $f(x,y), \varphi(x,y), \psi(x,y)$ を $(x,y) \neq (0,0)$ で次のように定義する．

$$f(x,y) = \exp(ax - by)\cos(bx + ay), \quad \varphi(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \psi(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

さらに $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ と定義する．

(1) Δf を求めよ．

(2) $\Delta \varphi$ を求めよ．

(3) $F(x,y) = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ として ΔF を求めよ．

$\boxed{2}$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) ${}^t TAT$ が対角行列となるような直交行列 T を求めよ．ただし，${}^t T$ は T の転置行列を表す．

(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y,z)$ とする．xyz 空間において ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = -3$ を満たす点 (x,y,z) の集合はある曲面となる．(1) の直交行列 T を用いて

$$\boldsymbol{x'} = {}^t T\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x'} = {}^t(x', y', z')$$

という座標変換を施すと，曲面の方程式 ${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = -3$ は x', y', z' のどのような方程式に変換されるか答えよ．

(3) (2) で得られた x', y', z' の方程式が表す曲面の概形を $x'y'z'$ 空間において描け．

$\boxed{3}$ 次の 3 階線形常微分方程式を考える.

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+a(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b(t)\frac{dx(t)}{dt}+c(t)x(t)=0 \qquad (\star)$$

ここで，$a(t), b(t), c(t)$ は $\mathbb{R}$ で定義された有界な連続関数とする.

(1) x_1, x_2, x_3 を $(\star)$ の解とし，これらに対して関数 J を

$$J(t)=\det\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \\ x_1{}'(t) & x_2{}'(t) & x_3{}'(t) \\ x_1{}''(t) & x_2{}''(t) & x_3{}''(t) \end{bmatrix}$$

と定める．このとき J は次の 1 階常微分方程式を満足することを示せ.

$$J'(t)=-a(t)J(t)$$

(2) 上記 (1) と同様に， x_1, x_2, x_3 を $(\star)$ の解とし，さらに

$$J(0)=\det\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) \\ x_1{}'(0) & x_2{}'(0) & x_3{}'(0) \\ x_1{}''(0) & x_2{}''(0) & x_3{}''(0) \end{bmatrix}\neq 0$$

と仮定する．このとき，任意の t において，3 つのベクトル $(x_1(t), x_1{}'(t), x_1{}''(t))$, $(x_2(t), x_2{}'(t), x_2{}''(t))$, $(x_3(t), x_3{}'(t), x_3{}''(t))$ は 1 次独立となることを示せ.

$\boxed{4}$ α, β を実数とする.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ の固有値が二つとも負になるために α, β の満たすべき条件を求め，そのときの固有値を求めよ.

(2) 積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

の値を求めよ.

(3) 上記の (1) の条件の下で

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha x^2+2\beta xy+\alpha y^2}\,dxdy$$

の値を α, β を用いて表せ.

$\boxed{5}$ 確率変数 Z は確率密度関数 $f(z) = Ce^{-\lambda|z|}$ $(-\infty < z < \infty)$ をもつ．ただし，C, λ は正の定数とする．

(1) C を λ を用いて表せ．

(2) Z の積率母関数 $M_Z(t) = E[e^{tZ}]$ $(|t| < \lambda)$ を求めよ．

(3) 確率変数 X, Y が独立で，共に平均 $\dfrac{1}{\lambda}$ の指数分布に従うとき，$X - Y$ は Z と同一の分布に従うことを示せ．

$\boxed{6}$ データ $x_1, \ldots, x_n$ の順序統計量を $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ とする．

(1) データの偏差 $x_i - \alpha$ の絶対値和を最小にする α の値を求めよ．

(2) $x_{(j)} = \dfrac{j}{n}$ $(j = 1, \ldots, n)$ のとき, ジニ係数

$$G = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|}{2\,n^2\,\bar{x}}$$

の値を求めよ. ただし, $\bar{x}$ は標本平均である.

システム創成専攻 数理科学 II

以下の１２問の中から４問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ ξ を実数の定数とする．定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

の値を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ である．

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して, n 次正方行列 A_n および変数 x を含んだ n 次正方行列 B_n を次のように定める．

(i) $n=2$ のとき,

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

(ii) $n\geq 3$ のとき,

$$A_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & \cdots & \cdots & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix},\ B_n=\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ．

(1) $\det B_n = x\det B_{n-1}+a_n$ $(n\geq 3)$ を示せ．

(2) $x^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}=0$ が成り立つとき $\operatorname{rank} B_n = n-1$ を示せ．

(3) 行列 A_n が対角化できるための必要十分条件は，固有方程式 $x^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}=0$ が重根をもたないことである．このことを示せ．

$\boxed{3}$ 実数列 u_j $(j = 0, 1, 2, \cdots, n+1)$ が,

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

を満足するとき,

$$\min_{1 \leq j \leq n} u_j \geq \min\{u_0, u_{n+1}\}$$

となることを証明せよ.

$\boxed{4}$ $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0)$ に対し $f(s) = \log \Gamma(s)$ とおく. 以下の (1) から (4) を示せ.

(1) $f''(s) = \displaystyle\int_0^\infty (\log x)^2 \frac{e^{-x} x^{s-1}}{\Gamma(s)} dx - \left(\int_0^\infty (\log x) \frac{e^{-x} x^{s-1}}{\Gamma(s)} dx \right)^2$

(2) $f''(s) = \displaystyle\frac{1}{2\Gamma(s)^2} \iint_{\{(x,y)\,|\,x>0,\ y>0\}} \left(\log \left(\frac{y}{x} \right) \right)^2 e^{-(x+y)} (xy)^{s-1} \, dxdy$

(3) $f''(s) = \displaystyle\frac{\Gamma(2s)}{2\Gamma(s)^2} \int_0^\infty (\log v)^2 \frac{v^{s-1}}{(1+v)^{2s}} dv$

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f''(n) = 0$

ただし, n は自然数を表し, スターリングの公式 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!} = 1$ を用いてもよい.

$\boxed{5}$ xy 平面上の点 P は $t=0$ で $(x,y)=(1,0)$ にあり, 直線 $x=1$ 上を速さ 1 で y が増加する方向に移動する. 同じく点 Q は時刻 $t=0$ で原点にあり, その x 座標のみに連続的に依存する速さ $a=a(x)>0$ で P を追跡する. すなわち, Q はその速度ベクトルが常に $\overrightarrow{QP}$ と同じ向きになるように移動する.

(1) Q の軌道の上で

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}}{a(x)(1-x)}$$

が成り立つことを示せ.

(2) Q の軌道の上で

$$y=\frac{1}{2}\int_0^x\left(e^{A(s)}-e^{-A(s)}\right)ds$$
$$A(s)=\int_0^s\frac{dr}{a(r)(1-r)}$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ $L^2(0,1)$ を $(0,1)$ 上の実数値 2 乗可積分ルベーグ可測関数全体の集合とし, $f, g \in L^2(0,1)$ に対して

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

と定める. $\{e_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \subset L^2(0,1)$ が次の (i), (ii) を満たすとする.

(i) $n \neq m$ のとき, $(e_n, e_m) = 0$ かつ, すべての n について $(e_n, e_n) = 1$.

(ii) 任意の $f \in L^2(0,1)$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} (f, e_n) e_n(x) \right|^2 dx = 0$$

以下で, A はルベーグ測度正の $(0,1)$ の部分集合を表す.

(1) 任意の $f \in L^2(0,1)$ に対して,

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)^2$$

を示せ.

(2) $|A| = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_A e_n(x)dx \right)^2$ を示せ. ただし, $|A|$ は A のルベーグ測度を表す.

(3) $\left(\displaystyle\int_A e_n(x)dx \right)^2 \leq \displaystyle\int_A e_n(x)^2 dx \cdot |A|$ を示せ.

(4) $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)^2$ とおく. $\displaystyle\int_A S(x)dx \geq 1$ となることを示せ.

(5) ほとんどすべての x について $S(x) = +\infty$ を示せ.

$\boxed{7}$ 確率変数 X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従い，確率変数 Y は，$X = x$ が与えられているという条件のもとで，正規分布 $N(x, v^2)$ に従うとする．

(1) Y の周辺分布は正規分布であることを示し，その平均および分散を求めよ．

(2) $Y = y$ が与えられているという条件のもとで，X は正規分布に従うことを示し，その平均および分散を求めよ．

$\boxed{8}$ 確率変数 X の分布関数 $P(X \leq x)$ は必ずしも連続ではないとする．このとき

$$F(x, \alpha) = P(X < x) + \alpha P(X = x)$$

と定義する．ただし，$0 \leq \alpha \leq 1$ である．以下では，$P(X \leq x)$ が x の関数として右連続であり，左極限をもつことを用いてよい．

(1) 2 点 (x, α), (x', α') に対して

$$\{x < x'\} \quad \text{または} \quad \{x = x',\ \alpha < \alpha'\}$$

のとき $F(x, \alpha) \leq F(x', \alpha')$ を示せ．

(2) 任意の $0 < v < 1$ に対し $F(x(v), \alpha(v)) = v$ となる $x(v), \alpha(v)$ が存在することを示せ．

(3) U を X と独立な確率変数とし区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従うものとする．このとき $V = F(X, U)$ は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従うことを示せ．

$\boxed{9}$ δ を実数とする．確率変数 X_δ，Y は互いに独立で それぞれ 正規分布 $N(\delta, 1)$, $N(0, 1)$ に従うものとする．

(1) X_δ^2 の確率密度関数 $f(x|\delta)$ $(x > 0)$ を求めよ．また，固定された $\delta\,(\neq 0)$ に対して $\dfrac{f(x|\delta)}{f(x|0)}$ は x の狭義単調増加関数であることを示せ．

(2) X_δ^2 と $X_\delta^2 + Y^2$ の分布の上側 $100\,\alpha$ %点をそれぞれ $\chi^2_{1,\alpha}(\delta)$, $\chi^2_{2,\alpha}(\delta)$ で表し，

$$I(\delta) = P\Big(X_\delta^2 \geq \chi^2_{1,\alpha}(0)\Big) - P\Big(X_\delta^2 + Y^2 \geq \chi^2_{2,\alpha}(0)\Big)$$

とおく．任意の実数 k に対して

$$I(\delta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(1_{\{x \geq \chi^2_{1,\alpha}(0)\}} - 1_{\{x+y \geq \chi^2_{2,\alpha}(0)\}}\Big)\Big(f(x|\delta) - kf(x|0)\Big) f(y|0)\,dxdy$$

が成立することを示せ．ここで，$A\,(\subset \mathbb{R}^2)$ に対して $1_A = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in A) \\ 0 & ((x,y) \notin A) \end{cases}$ である．

(3) $I(\delta) \geq 0$ を示せ．

$\boxed{10}$ 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立に区間 (0,1) 上の一様分布に従うとする．確率変数 Y, Z を $Y = \min\{X_1, X_2\}$, $Z = \max\{X_1, X_2\}$ によって定義する．

(1) (Y, Z) の同時確率密度関数を求めよ．

(2) Y と Z の相関係数を求めよ．

$\boxed{11}$ 確率変数 X, Y, Z, W, U の取りうる値は２つで，それぞれ $\{x_1, x_2\}$, $\{y_1, y_2\}$, $\{z_1, z_2\}$, $\{w_1, w_2\}$, $\{u_1, u_2\}$ とする．また，$(X, Y) = (x_i, y_j)$ である確率を $\mathrm{pr}(x_i, y_j)$, $U = u_k$ を与えたときの $(X, Y) = (x_i, y_j)$ の条件付き確率を $\mathrm{pr}(x_i, y_j | u_k)$ $(i, j, k = 1, 2)$ と記し，他の確率についても同様に記す．ここに, $\mathrm{pr}(x_i, y_j, z_k, w_l, u_m) > 0$ $(i, j, k, l, m = 1, 2)$ とする．このとき，次式が成立するものとする．

$$\mathrm{pr}(x_i, y_j, z_k, w_l | u_m) = \mathrm{pr}(x_i|u_m)\mathrm{pr}(y_j|u_m)\mathrm{pr}(z_k|u_m)\mathrm{pr}(w_l|u_m) \qquad (i, j, k, l, m = 1, 2)$$

(1) 次の２つの等式を証明せよ．

$$\mathrm{pr}(x_i) = \mathrm{pr}(x_i|u_1)\mathrm{pr}(u_1) + \mathrm{pr}(x_i|u_2)\mathrm{pr}(u_2)$$
$$\mathrm{pr}(x_i, y_j) = \mathrm{pr}(x_i|u_1)\mathrm{pr}(y_j|u_1)\mathrm{pr}(u_1) + \mathrm{pr}(x_i|u_2)\mathrm{pr}(y_j|u_2)\mathrm{pr}(u_2)$$

(2) 次の等式を証明せよ．

$$\begin{aligned}&\bigl\{\mathrm{pr}(x_i, y_j) - \mathrm{pr}(x_i)\mathrm{pr}(y_j)\bigr\}\bigl\{\mathrm{pr}(z_k, w_l) - \mathrm{pr}(z_k)\mathrm{pr}(w_l)\bigr\} \\ &\quad -\bigl\{\mathrm{pr}(x_i, z_k) - \mathrm{pr}(x_i)\mathrm{pr}(z_k)\bigr\}\bigl\{\mathrm{pr}(y_j, w_l) - \mathrm{pr}(y_j)\mathrm{pr}(w_l)\bigr\} = 0\end{aligned}$$

$\boxed{12}$ 確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ は互いに独立で，同一の分布

$$P\left(X_i = (-1)^{k-1}k\right) = C\,\frac{\log k}{k^3} \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

に従うものとする．ただし，C は確率の総和を 1 にするための正の定数である．また，自然数 n に対して，

$$X_{n,i} = \begin{cases} X_i & (|X_i| \leq n \text{ のとき}) \\ 0 & (|X_i| > n \text{ のとき}) \end{cases}$$

とし，$S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ とおく．

(1) $\mu_n = E\left[X_{n,i}\right]$ とするとき，μ_n を C と n を用いて表せ．

(2) 任意の自然数 n に対して，

$$\mu_{2n} < \mu_{2n+2} < \mu_{2n+3} < \mu_{2n+1}$$

が成立することを示し，数列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せ．

(3) $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ とする．このとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0$$

が成立することを示せ．