数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ を原点を除いた平面上で定義された滑らかな関数とし，

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \qquad (r > 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi)$$

とする (極座標)．u, v, w についての関係式

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - \sin\theta\dfrac{\partial w}{\partial r} \\[2ex] v = -\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \cos\theta\dfrac{\partial w}{\partial r} \end{cases}$$

が成り立つとき，以下の二つの式を示せ．

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$\boxed{2}$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) $\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ とし，2 次形式 $F(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ を考える．$\boldsymbol{x}$ が xyz 空間内の球面 $S = \{\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上を動くときの $F(\boldsymbol{x})$ の最大値，最小値，および，$F(\boldsymbol{x})$ がそれらの値をとる点 $\boldsymbol{x}$ の集合を求めよ．

$\boxed{3}$ 次の方程式を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = e^x + 2\int_0^x \cos(x-s) f(s)\,ds, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{4}$ α, β を実数とする.

(1) 広義積分

$$\int_0^\infty x^{2\alpha}\{\log(1+x^2)\}^\beta dx$$

が収束するような α, β の満たすべき条件を求めよ.

(2) 広義重積分

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (x^2+y^2)^\alpha \{\log(1+x^2+y^2)\}^\beta dxdy$$

が収束するような α, β の満たすべき条件を求めよ.

$\boxed{5}$ X は正の整数値をとる確率変数であり，$E(X) < \infty$ とする．

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対して, 次式が成立することを示せ.

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = nP(X \le n) - \sum_{k=1}^{n} P(X < k)$$

(2) $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X \ge k)$ を示せ.

(3) X の分布関数が

$$P(X \le k) = \frac{k(k+5)}{(k+2)(k+3)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

であるとき, $E(X)$ を求めよ.

$\boxed{6}$ 統計量 S と未知パラメータ v ($v > 0$) に関して S/v が自由度 n のカイ 2 乗分布に従うとする．ここで n は既知の正整数である．$\hat{v}_a = aS$ という形の v の推定量を考える．ただし，自由度 n のカイ 2 乗分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

であり，$\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0$$

である．

(1) 自由度 n のカイ 2 乗分布の平均と分散を求めよ．

(2) 推定量 $\hat{v}_a$ が v の不偏推定量となる a を求めよ．

(3) 平均 2 乗誤差 $E\{(\hat{v}_a - v)^2\}$ を最小にする a を求めよ．

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 正の実数 R に対して，複素平面上の 2 点 A, B を $A = R$, $B = \dfrac{R + Ri}{\sqrt{2}}$ で定める．ただし $i = \sqrt{-1}$ である．原点 O を中心とする扇形の周 $OABO$ を積分路として $\exp(-z^2)$ を積分することにより

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

の値を求めよ．必要なら $\displaystyle\int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてもよい．

$\boxed{2}$ 0 以上の整数 α，β，γ に対して，x_1，x_2，x_3 の多項式 $\xi(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$ を次のように行列式を用いて定める．

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{vmatrix} x_1^\alpha & x_1^\beta & x_1^\gamma \\ x_2^\alpha & x_2^\beta & x_2^\gamma \\ x_3^\alpha & x_3^\beta & x_3^\gamma \end{vmatrix}$$

また

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\xi(\alpha + 2, \beta + 1, \gamma)}{\xi(2, 1, 0)}$$

とおく．

(1) $\xi(2, 1, 0)$ を求めよ．

(2) $S_{0,0,0}(x_1, x_2, x_3)$ および $S_{2,1,0}(x_1, x_2, x_3)$ を多項式の形で求めよ．

(3) k を 0 以上の整数とするとき，次の等式を示せ．

$$\begin{aligned}(x_1^k + x_2^k + x_3^k)&S_{\alpha,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) \\ &= S_{\alpha+k,\beta,\gamma}(x_1, x_2, x_3) + S_{\alpha,\beta+k,\gamma}(x_1, x_2, x_3) + S_{\alpha,\beta,\gamma+k}(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

(4) 次の等式を示せ．

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = S_{4,0,0}(x_1, x_2, x_3) - S_{3,1,0}(x_1, x_2, x_3) + S_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$$

$\boxed{3}$ 2 辺の長さが a (横の辺) と b （縦の辺）の長方形が平面内にあるとする．ただし $a \geq b > 0$ である．この長方形を次の規則に従って変形する：

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -\dfrac{1}{y(t)}, \quad t > 0 \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -\dfrac{1}{x(t)}, \quad t > 0 \\ x(0) = a, \quad y(0) = b \end{cases}$$

ここで，$x(t)$，$y(t)$ は，それぞれ，時刻 t における横の辺の長さ，縦の辺の長さである．

このとき，ある時刻 $T_* > 0$ で長方形が一点に潰れてしまう，すなわち，

$$\lim_{t \to T_*} x(t) = \lim_{t \to T_*} y(t) = 0$$

となることを示せ.

$\boxed{4}$ $a > 0$ とする．区間 $[0, a]$ 上の実数値連続関数 f に対して $m_a(f) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ とおく．

(1) ある実数 $\alpha \in (0, a)$ が存在して $f(\alpha) = m_a(f)$ となることを示せ.

(2) ある正の定数 C が存在して, $[0, a]$ 上の任意の C^1 級関数 f に対して, 不等式

$$\int_0^a (f(x) - m_a(f))^2\, dx \quad \leq \quad C \int_0^a f'(x)^2 dx$$

が成立することを示せ.

(3) 正の定数 C_a を次のように定める.

$$C_a = \sup \left\{ \left. \frac{\displaystyle\int_0^a (f(x) - m_a(f))^2\, dx}{\displaystyle\int_0^a f'(x)^2 dx} \right| f \text{ は } [0, a] \text{ 上の } C^1 \text{級関数で，かつ定数関数ではない} \right\}$$

このとき $\displaystyle\lim_{a \to \infty} C_a = +\infty$ を示せ.

$\boxed{5}$ a を $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする．区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数の集合を $C[0,1]$ と書く．このとき $f,\,g\in C[0,1]$ に対して

$$H(f,g)=\int_0^1\int_0^t a(s,t)f(s)g(t)dsdt+\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

と定め，また $J(f)=H(f,f)$ とする．

(1) 次の二つの命題が同値であることを示せ．
命題 A: 任意の $f,\,g\in C[0,1]$ および任意の $\alpha\in[0,1]$ に対して次式が成り立つ：

$$J(\alpha f+(1-\alpha)g)\le \alpha J(f)+(1-\alpha)J(g)$$

命題 B: 任意の $f\in C[0,1]$ に対して $J(f)\ge 0$ が成り立つ．

(2) 関数 a が $\displaystyle\max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]}|a(s,t)|\le 2$ を満たすとき，すべての $f\in C[0,1]$ に対して $J(f)\ge 0$ が成り立つことを示せ．

(3) ある $p\in C[0,1]$ に対して, $a(s,t)=p(s)p(t)$ であるとき，すべての $f\in C[0,1]$ に対して　$J(f)\ge\displaystyle\int_0^1 f(t)^2dt$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ 次のアンケート調査を考える．

次の質問 1 と質問 2 に yes または no で回答してください． 質問 1：自分で正しいサイコロを振って，偶数の目が出たら A_1 に回答し，奇数の目が出たら B_1 に回答して下さい． A_1「あなたはタバコを吸ったことがありますか」 B_1「あなたの満年齢は偶数ですか」 質問 2：自分で正しいサイコロを振って，偶数の目が出たら A_2 に回答し，奇数の目が出たら B_2 に回答して下さい． A_2「あなたは駐車違反をしたことがありますか」 B_2「あなたの基礎年金番号は偶数ですか」

ただし，B_1 と B_2 に対して yes と回答する確率はともに 1/2 であり，$B_1\perp\!\!\!\perp B_2$，$B_1\perp\!\!\!\perp A_2$，$A_1\perp\!\!\!\perp B_2$ とする．ここで $A\perp\!\!\!\perp B$ は事象 A, B が互いに独立であることを表す．

(1) 質問 1，質問 2 に yes と回答する確率をそれぞれ p_1，p_2 とする．A_1 に yes と回答する確率 q_1 を p_1 を用いて表せ．また，A_2 に yes と回答する確率 q_2 を p_2 を用いて表せ．

(2) 質問 1 と質問 2 の両方に yes と回答する確率を p_{12} とする．A_1 と A_2 の両方に yes と回答する確率 q_{12} を p_1，p_2，p_{12} を用いて表せ．

$\boxed{7}$ 実数値確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は, 同一の分布関数 $F(x)$ と確率密度関数 $f(x)$ をもつ分布に独立に従うとする. X_i $(i = 2, \dots, n-1)$ が転換点であるとは,

$$X_{i-1} \ < \ X_i \ > \ X_{i+1}$$

または

$$X_{i-1} \ > \ X_i \ < \ X_{i+1}$$

が成り立つことである.

(1) $X_1, \dots, X_n$ における転換点の個数を T_1 としたとき, T_1 の平均を求めよ.

(2) X_k と X_{k+1} $(k = 2, \dots, n-2)$ が共に転換点となる k の個数を T_2 としたとき, T_2 の平均を求めよ.

$\boxed{8}$ 確率変数 X, Y は独立で，ともに区間 $[-1, 1]$ 上の一様分布に従うとする．このとき,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad S = 2X\frac{\sqrt{|\log R|}}{R}, \quad T = 2Y\frac{\sqrt{|\log R|}}{R}$$

と定義する.

(1) $P(R \leq 1)$ の値を求めよ.

(2) $0 < R \leq 1$ のとき，X, Y を S, T の式で表せ.

(3) 実数 s_0, t_0 に対して,

$$P(S \leq s_0,\ T \leq t_0 \,|\, R \leq 1) = \Phi(s_0)\Phi(t_0)$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である.

$\boxed{9}$ 正値確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{\phi\,(x-\mu)}{1-\Phi\,(-\mu)}, \qquad x > 0, \quad -\infty < \mu < \infty$$

をもつとする．ここで，$\phi(\cdot)$ と $\Phi(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布の確率密度関数と分布関数である．

(1) $E(X)$ を μ の関数とみなすとき，$\lim\limits_{\mu\to-\infty} E(X)$ を求めよ．

(2) 分散 $V(X)$ について $V(X) < 1$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{10}$ 確率変数列 $\{X_n\}$ は互いに独立で，各 n に対して X_n は正規分布 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ に従い，$\mu_n \to 0$, $\sigma_n^2 \to 1$ $(n\to\infty)$ であるとする．また，Z を $N(0,1)$ に従う確率変数とする．

(1) 任意の自然数 p に対して

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n^p) = E(Z^p)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 確率変数列 $\{\xi_n\}$ は互いに独立で，各 n に対して，ξ_n は X_n と独立で

$$P\{\xi_n = 0\} = \frac{1}{n} = 1 - P\{\xi_n = 1\}$$

を満たすとする．このとき，実数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} X_n & (\xi_n = 1 \text{ のとき}) \\ a_n & (\xi_n = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると，a_n の選び方によらずに $\tilde{X}_n - X_n \xrightarrow{P} 0$ $(n\to\infty)$ となることを示せ．ただし，$\xrightarrow{P}$ は確率収束を表す．

(3) 任意の自然数 p に対して，ある実数列 $\{a_n\}$ が存在して，

$$E(Z^p) < \lim_{n\to\infty} E(\tilde{X}_n^p) < \infty$$

となることを示せ．