数理科学 I

$\boxed{1}\ \boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ $f = f(t,x)$ は C^3 関数で，すべての t,x に対し $f(t,x) > 0$ であるする. $u = (\log f)_x \left(= \dfrac{\partial}{\partial x} \log f\right)$ とおくとき，次の問に答えよ.

(1) 次の 2 つの条件が同値であることを証明せよ.

(A) u が $u_t = 2uu_x + u_{xx}$ を満たす.

(B) x によらない関数 $C(t)$ が存在して $f_t = f_{xx} + C(t)f$ とかける.

(2) k_1, l_1, k_2, l_2 を定数とする.

$$u = \frac{k_1 e^{k_1 x + l_1 t} + k_2 e^{k_2 x + l_2 t}}{e^{k_1 x + l_1 t} + e^{k_2 x + l_2 t}}$$

が (1) の (A) の方程式を満たすとき，k_1, l_1, k_2, l_2 の間の関係式を求めよ.

$\boxed{2}$ $n \times n$ 行列 A, B, I, O を用いて $2n \times 2n$ 行列を作る. ただし I は単位行列，O は零行列とする.

(1) $T = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$ は正則であり，$T^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} A+B & O \\ O & A-B \end{pmatrix}$ であることを示せ.

(2) $\det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \det A \det B$ を示せ.

(3) $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$ を示せ.

(4) $n = 3$ で $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ としたとき，6×6 行列 $\begin{pmatrix} A & I \\ I & A \end{pmatrix}$ のすべての固有値を求めよ.

$\boxed{3}$ a を正の実数とする.

(1) 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^a \int_0^a \max(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

(2) $n \geq 3$ なる自然数に対して，次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^a \int_0^a \cdots \int_0^a \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$\boxed{4}$ $g : [0,1] \to (0, +\infty)$ を 2 回微分可能な関数とする．さらに $B(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{g(s)}{G(s)}\, ds$，$G(s) = 1 + \displaystyle\int_0^s g(u)^2 du$ と定義する．g は次の積分方程式を満たすものとする：

$$g(t) = aB(t)g(t) + b$$

ただし，a, b は定数で $b \geq 2a > 0$ を満たす.

(1) g が次の 2 階微分方程式を満たすことを証明せよ.

$$\frac{ag(s)g''(s)}{g'(s)^2} = 3a - b \qquad (*)$$

(2) 変数変換 $y = \dfrac{g}{g'}$ を用いて,（$*$）を解け.

$\boxed{5}$ 確率変数 X は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする．さらに，確率変数 Y は $X=x$ $(0<x<1)$ が与えられたときの条件付き確率分布が 2 項分布 $B(n,x)$，すなわち試行回数 n （自然数），成功確率 x のベルヌーイ試行における成功回数の分布であるとする．

(1) $P(Y=k)=\frac{1}{n+1}$，$k=0,1,\ldots,n$ を示せ．

(2) $Y=k$ が与えられたときの X の条件付き分布を求めよ．

$\boxed{6}$ 3 変量の確率変数ベクトル (X,Y,Z) は平均 $E(X)=E(Y)=E(Z)=0$ であり共分散行列 $\mathbf{\Sigma}$ を持つとする．

(1) $\mathbf{\Sigma}$ は非負定符号，すなわち任意の 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{a}^T\mathbf{\Sigma}\boldsymbol{a}\geq 0$ となることを示せ．ここで $\boldsymbol{a}^T$ は列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を転置した行ベクトルである．

(2) $\mathbf{\Sigma}=\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & 1 \end{pmatrix}$ のとき ρ の取りうる範囲を求めよ．

(3) (2) で求めた ρ の範囲の中の最大値を与える (X,Y,Z) の例をあげよ．

(4) (2) で求めた ρ の範囲の中の最小値を与える (X,Y,Z) の例をあげよ．

数理科学 II

以下の１１問の中から４問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 次の方程式で定義される xy-平面の曲線を C とおく.

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(3x^2-y^2\right)y=0$$

(1) 曲線 C の概形を描け.

(2) 曲線 C の囲む面積を求めよ.

$\boxed{2}$ (1) 実数 t の C^1 関数 $a_{ij}(t)$ を (i,j) 成分とする n 次正方行列を $A(t)=(a_{ij}(t))$ とする.

$$\text{すべての } t\in\mathbb{R} \text{ について}\quad \det A(t)\neq 0$$

のとき,

$$\frac{d}{dt}\det A(t)=\mathrm{tr}\left(\dot{A}(t)A(t)^{-1}\right)\det A(t)$$

を示せ．ただし，$\dot{A}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}a_{ij}(t)\right)$ である．また，n 次正方行列 $X=(x_{ij})$ について，$\mathrm{tr}\,X=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_{ii}$ である.

(2) $\mathbb{R}^n$ 上の C^1 関数 $V_i=V_i(x)\ \ (x={}^t(x_1,\ldots,x_n), 1\le i\le n)$ について

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(x)\right|\ \middle|\ 1\le i,j\le n, x\in\mathbb{R}^n\right\}<\infty$$

とする．$V(x)={}^t\left(V_1(x),\ldots,V_n(x)\right)$ とおき, $\phi(t,x)={}^t\left(\phi_1(t,x),\ldots,\phi_n(t,x)\right)$ を初期条件

$$\phi(0,x)=x$$

のもとでの常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\phi(t,x)=V\left(\phi(t,x)\right)$$

の解とする．すべての $x\in\mathbb{R}^n$ について $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}(x)=0$ を仮定する．このとき，すべての $t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n$ について

$$\det D\phi(t,x)=1$$

を示せ．ただし，$D\phi(t,x)$ は $\dfrac{\partial\phi_i}{\partial x_j}(t,x)$ を (i,j) 成分とする n 次正方行列である.

$\boxed{3}$ $u_0 = u_0(x) \geq 0$ は $0 \leq x \leq 1$ で定義された連続関数で, $u = u(x,t)$ は $0 < T < +\infty$ に対して

$$\begin{cases} e^{-u(x,t)}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{1}{\displaystyle\int_0^1 e^{u(y,t)}dy}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t < T \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

の解であるとする. 以下を示せ.

(1) $e^{-u_0(x)} - e^{-u(x,t)}$ は t のみの関数である.

(2) $u_0(x_1) \leq u_0(x_2)$ をみたす $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ に対し, すべての $0 < t < T$ で

$$u(x_1,t) \leq u(x_2,t)$$

が成り立つ.

(3) $\displaystyle\lim_{t \uparrow T} \|u(\cdot,t)\|_\infty = +\infty$ が成り立つときは

$$T = -\int_0^1 \log\{e^{-u_0(x)} - e^{-\|u_0\|_\infty}\}dx - \int_0^1 u_0(x)dx$$

である. ただし $0 \leq x \leq 1$ 上の関数 $v = v(x)$ に対して, $\|v\|_\infty = \displaystyle\sup_{0 \leq x \leq 1} |v(x)|$ である.

$\boxed{4}$ (1) 関数 f を $(-\infty,\ \infty)$ において連続で

(A)
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$$

を満たすものとする． このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$ とならない関数 f の例を挙げよ.

(2) 関数 f を $(-\infty,\ \infty)$ において連続微分可能で，$p > 1$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^p dx < \infty$$

を満たすものとする．このとき，任意の $x,\ y \in (-\infty, \infty)$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(z)|^p dz\right)^{\frac{1}{p}}$$

となることを示せ.

(3) (2) の条件を満たす関数 f が，さらに (A) を満たすならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} |f(x)| = 0$ となることを示せ.

$\boxed{5}$ a, b, c を実数，f を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への C^2 関数とし，$z = z(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への C^2 関数とする．

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{(z-c)^2 \dfrac{\partial}{\partial x} f\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)\right\}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{(z-c)^2 \dfrac{\partial}{\partial y} f\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)\right\}$ を $f', f'', z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}$ を用いて表せ．

(2) $\dfrac{x-a}{z-c} = f\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right)$ の時 $f'\left(\dfrac{y-b}{z-c}\right) = \dfrac{x-a}{y-b}$ または $\{(z-c)-(y-b)z_y\}^2 z_{xx} = \{(y-b)z_x\}^2 z_{yy}$ が成立することを示せ．

$\boxed{6}$ X, Y を互いに独立でともに標準正規分布に従う確率変数とする．(X, Y) の同時分布を 2 変量標準正規分布という．

(1) 確率変数 U, V を次式で定めるとき，(U, V) の同時分布を求めよ．

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (0 \le \theta < 2\pi)$$

(2) 2 次の実正則行列 A, B が $AA^T = BB^T$ をみたすとする．ここで A^T は行列 A の転置行列を表す．$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ と定義するとき，(X_1, Y_1) の同時分布は (X_2, Y_2) の同時分布と一致することを示せ．

$\boxed{7}$ X, Y が平均 $E(X) = E(Y) = 0$，分散 $Var(X) = Var(Y) = 1$，相関係数 $Cor(X, Y) = \rho$ をもつ 2 変量正規分布に従うときその確率密度関数は

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right)$$

である．ただし $-1 < \rho < 1$．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t) dt$$

とおく．$Z = \max(X, Y)$ とする．

(1) $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き確率密度関数 $f_{x \cdot y}(x|y)$ を求めよ．

(2) Z の確率密度関数が

$$f_z(z) = 2\phi(z)\Phi\left(\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}\, z\right)$$

で与えられることを証明せよ．

$\boxed{8}$ $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ は互いに独立で，それぞれ平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数である．ここで $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ は未知である．また，Y_m は自由度 m のカイ 2 乗分布に従う確率変数であり，その確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m/2)2^{m/2}} x^{m/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

である．ここでガンマ関数は

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx, \quad a > 0$$

である．さらに

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_n = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

とする．

(1) T_n/n は σ^2 の最尤推定量であること，および不偏推定量ではないことを示せ．

(2) $E(\sqrt{Y_m})$ を求めよ．

(3) $\dfrac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{2}} \sqrt{T_n}$ は σ の不偏推定量であることを示せ．

$\boxed{9}$ 次の自己回帰過程モデルを考える．

$$Y_t = c + \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 2, 3, \ldots, T$$

ただし $\{\varepsilon_t\}$ は互いに独立で共通の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従い，かつ ε_t は $Y_1, \ldots, Y_{t-1}$ と独立である．$\boldsymbol{\theta} = (c, \phi, \sigma^2)$ とおく．

(1) $Y_1 = y_1$ という条件の下での $Y_2, \ldots, Y_T$ の条件付き同時確率密度関数

$$f_{Y_T, Y_{T-1}, \ldots, Y_2 | Y_1}(y_T, y_{T-1}, \ldots, y_2 | y_1; \boldsymbol{\theta})$$

を求めよ．

(2) データ $\{y_T, y_{T-1}, \ldots, y_1\}$ が得られたとき，c, ϕ の最尤推定量 $\hat{c}, \hat{\phi}$ を求めよ．

(3) σ^2 の最尤推定量 $\hat{\sigma}^2$ を (2) で得られた $\hat{c}, \hat{\phi}$ を用いて表せ．

$\boxed{10}$ $\{X_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$ を互いに独立な確率変数の列で平均と分散を $E(X_k) = \mu, Var(X_k) = k$ とする．$\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく．T_n を未知母数 μ の推定量とするとき，任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(|T_n - \mu| < \epsilon) = 1$$

が成立するとき，T_n は μ の一致推定量であるという．

(1) T_n を母数 μ の不偏な推定量とする．$Var(T_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ のとき，T_n は μ の一致推定量であることを示せ．

(2) $\bar{X}_n$ は μ の一致推定量とならない場合がある．このことを具体的な例を用いて示せ．

(3) w_k を定数とし $\hat{\mu} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k X_k$ とおく．$\hat{\mu}$ が μ の不偏な推定量であるとき，その分散 $Var(\hat{\mu})$ が最小となるように w_k を定めよ．

(4) (3) で定めた w_k をもつ $\hat{\mu}$ は μ の一致推定量であることを示せ．

$\boxed{11}$ 確率変数 X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ は 0 か 1 の値をとり，正の定数 π_0, π_1 に対して

$$P(X_{i+1} = 1 | X_i = 0) = \pi_0, \quad P(X_{i+1} = 1 | X_i = 1) = \pi_1$$

とする．さらに，自然数 $j = 2, 3, \ldots$ に対して以下を仮定する．

$$P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 0,\ X_i = 1) = \pi_0, \quad P(X_{i+j} = 1 | X_{i+j-1} = 1,\ X_i = 1) = \pi_1.$$

(1) $p_i = P(X_i = 1)$ とおくとき p_{i+1} を p_i, π_0, π_1 で表せ．

(2) 任意の自然数 i に対して $p_i = q$（定数）とする．このとき $E(X_i X_{i+k})$ は i に関係しないことを示し，$e_k = E(X_i X_{i+k})$ とおくとき e_0, e_1 を求めよ．また，e_k を e_{k-1}, π_0, π_1, q を用いて表せ．

(3) (2) の条件の下で共分散に対して

$$\lim_{k\to\infty} Cov(X_i, X_{i+k}) = 0$$

が成立することを示せ．