数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ f, g は $\mathbb{R}$ 上の C^2 関数，a, b を実数の定数とし F を

$$F(x, y) = xf(ax + by) + yg(ax + by)$$

と定める．

(1)

$$3b^2 F_{xx} - 2abF_{xy} - a^2 F_{yy}$$

を f, g, f', g', f'', g'' 等を用いて書き表せ．

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x \\ g(x) &= \arctan x \end{aligned}$$

とする．ただし $\arctan x$ は $x = \tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ の逆関数とする．

$$3b^2 F_{xx} - 2abF_{xy} - a^2 F_{yy}$$

を計算せよ．

$\boxed{2}$ 行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ を次のようにおく．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V を次のように定めるとき，V の基底を求めよ．

$$V = \left\{ A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

(2) 長さ $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}|$ を最小にする $\boldsymbol{v} \in V$ を求めよ．

(3) $|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}|$ を最小にする $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ 2 変数関数 $f = f(t, s)$ は $\mathbb{R}^2$ 上定義された C^1 関数とする.

(1) $F(t, x) = \displaystyle\int_0^x f(t, s)ds$ は (t, x) の C^1 関数であることを示せ.

(2) $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(t, s)ds$ とおくと

$$g'(t) = f(t, t) + \int_0^t f_t(t, s)ds$$

となることを示せ.

$\boxed{4}$ α, β, γ を実数の定数とする.

(1) 関数 $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|^\gamma}{|x|^{2\alpha}|\log x^2|^\beta}$ について，広義積分

$$\int_1^2 f(x)dx$$

が収束するための α, β, γ に関する条件を求めよ.

(2) (1) で定義した関数 $f(x)$ について，広義積分

$$\int_2^\infty f(x)dx$$

が収束するための α, β, γ に関する条件を求めよ.

(3) 広義積分

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{|x^2 + y^2 + z^2 - 1|^\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha |\log(x^2 + y^2 + z^2)|^\beta} dxdydz$$

が収束するための α, β, γ に関する条件を求めよ.

$\boxed{5}$ 座標平面上に，座標がそれぞれ (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) で表される 2 個の点をとる．ただし，X_1, X_2, Y_1, Y_2 は互いに独立で，区間 (0,1) 上の一様分布に従う確率変数である．$U = |X_2 - X_1|$, $V = |Y_2 - Y_1|$ とする．

(1) U の確率密度関数を求めよ．

(2) $\sqrt{U^2 + V^2} \leq 1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{6}$ X は非負の値をとる連続型確率変数で確率密度関数 $f(x)$ $(x \geq 0)$ をもつとする．a を正の実数とし確率変数 Y を次式で定義する．

$$Y = \begin{cases} 1, & X \leq a \\ 0, & X > a \end{cases}$$

(1) 期待値 $E[Y]$, $E[XY]$ を a と $f(x)$ を用いて表せ．

(2) 任意の正の実数 a に対して $E[Y] > 0$ とする．$\dfrac{E[XY] + a(1 - E[Y])}{E[Y]}$ が a の値によらないとき，$f(x)$ を定めよ．

数理科学 II

以下の１０問の中から４問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ $0 < r < 1$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - 2r\cos\theta + r^2)^2}$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ A を n 次正方行列とする $(n \geq 2)$．その (i, j) 成分を a_{ij} と書く．すなわち $A = (a_{ij})$ である．また，この行列 A の (i, j) 余因子を Δ_{ij} として，これを (i, j) 成分にもつ行列を $X = (\Delta_{ij})$ と定める．

(1) 行列 A が逆行列をもつとき，その行列式 $\det A$ は 0 でないことを示せ．

(2) $A\,{}^tX = (\det A)I$ を示せ．ただし，${}^tX$ は X の転置行列で I は単位行列を表す．

(3) $\det A \neq 0$ ならば A の逆行列が存在することを示せ．

$\boxed{3}$ 実数 a, b は $ab \neq 0$ を満たすとする．$x(t), y(t)$ をそれぞれ微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x, \quad x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = b$$

の解であるとする．さらに $z = x^2 - y^2, w = 2xy$ とする．

(1) 点 $(x(t), y(t))$ の軌跡を表す曲線の方程式を求めよ．

(2) 点 $(z(t), w(t))$ の軌跡を表す曲線の方程式を求めよ．

(3) $\tau(t) = \displaystyle\int_0^t (x(s)^2 + y(s)^2)ds$ と時間変数を変換し，その逆関数を $t = \phi(\tau)$ とする．このとき $Z(\tau) = z(\phi(\tau)), W(\tau) = w(\phi(\tau))$ は

$$\frac{d^2Z}{d\tau^2} = -\frac{2(a^2+b^2)Z}{(Z^2+W^2)^{3/2}},$$

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} = -\frac{2(a^2+b^2)W}{(Z^2+W^2)^{3/2}}$$

を満たすことを示せ．

$\boxed{4}$ $\alpha > 0,\ t \in \mathbb{R}$ に対して

$$I(\alpha, t) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin(tx)}{x} dx$$

とする．

(1) $I(\alpha, t)$ は t について微分可能な関数であることを証明せよ．

(2) $\dfrac{\partial I}{\partial t}(\alpha, t)$ および $I(\alpha, t)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\alpha \to +0} I(\alpha, t)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 連続関数 $f = f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ に対して $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ $(p \geq 1)$ と定める．また，$M = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ は $0 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を表す.

(1) すべての $p \geq 1$ について $\|f\|_p \leq M$ を示せ.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $0 \leq a < b \leq 1$ を満たす実数 a, b が存在して

$$a \leq x \leq b \text{ ならば } |f(x)| \geq M - \varepsilon$$

となることを示せ.

(3) $\liminf\limits_{p \to \infty} \|f\|_p \geq M$ を示せ.

(4) $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ となることを示せ.

$\boxed{6}$ 正数 p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ を満たす.

(1) $\sum_{i=1}^{n} p_i \log \dfrac{p_i}{q_i} \;\geq\; 0$ を示せ.

(2) $\dfrac{p_1}{q_1} \leq \dfrac{p_2}{q_2} \leq \cdots \leq \dfrac{p_n}{q_n}$ であるとき，$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \dfrac{p_i}{q_i} \leq (1 - p_1) \log \left(\dfrac{q_1 p_n}{p_1 q_n}\right)$ を示せ.

$\boxed{7}$ 確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で同一分布に従い

$$P(X_k = 1) = p,\ P(X_k = 0) = 1 - p, \quad (k = 1, \ldots, n;\ 0 < p < 1)$$

である．$X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とし，$D = \{0, 1, \ldots, n\}$ とおく．

(1) $g(x)$ を D 上で定義された実数値関数とする．任意の $0 < p < 1$ に対して $E[g(X)] = 0$ ならば D 上で $g(x) = 0$ であることを示せ.

(2) X/n は p の不偏推定量であることを示せ.

(3) $\hat{p}(x)$ を D 上で定義された実数値関数とする．$\hat{p}(X)$ が p の不偏推定量であるならば, $\hat{p}(X) = X/n$ であることを示せ.

(4) 条件付き期待値 $E[X_1 | X = x]$ を求めよ.

$\boxed{8}$ あるサンプルにおいて，n_1, n_2, n_3 をそれぞれ AA, Aa, aa の遺伝子型をもつ個体数とし，総個体数を $n = n_1 + n_2 + n_3$ とする．ここで, Hardy-Weinberg 均衡を仮定する．すなわち, (n_1, n_2, n_3) はパラメータ $(p^2, 2p(1-p), (1-p)^2)$ をもつ三項分布からのサンプルであるとする. ただし, $0 < p < 1$ である. なお，パラメータ (p_1, p_2, p_3) をもつ三項分布の確率関数は次式で与えられる $(p_1, p_2, p_3 \geq 0;\ p_1 + p_2 + p_3 = 1)$.

$$\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \quad (n_1, n_2, n_3 \text{は非負の整数};\ n = n_1 + n_2 + n_3)$$

(1) 対数尤度関数 $\ell(p)$ を求め, p の最尤推定量を求めよ.

(2) p に関する Fisher 情報量を求めよ.

(3) Hardy-Weinberg 均衡が成り立つかどうかを検討するため，ある母集団から無作為に 100 個の個体を抽出し遺伝子型を調べたところ, $(n_1, n_2, n_3) = (70, 20, 10)$ を得た．有意水準を $\alpha = 0.05$ とし，Hardy-Weinberg 均衡を帰無仮説として適合度検定を行え. 必要ならば, $\chi_2^2(0.05) = 5.99, \chi_1^2(0.05) = 3.84$ を使ってもよい.

$\boxed{9}$ 実数値確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は独立で，平均 θ，分散 1 をもつとする．$\bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく．

(1) 統計量 $(\bar{X}_n)^2$ が θ^2 の不偏推定量かどうかを調べ，不偏でない場合には θ^2 の不偏推定量を一つ構成せよ．

(2) 確率変数 Y, Z と任意の $\varepsilon > 0,\ \delta > 0$ に対して，以下の不等式を示せ．

$$P\Big(\ |YZ| > \varepsilon,\ |Y| \le \delta\Big) \le \frac{\delta^2}{\varepsilon^2} E[Z^2]$$

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\lim_{n\to\infty} P\Big(\ |(\bar{X}_n)^2 - \theta^2| > \varepsilon\Big) = 0$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{10}$ 実数値確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は同一の確率密度関数 f をもつ．ここで，f は $\mathbb{R}$ 上で定義された C^2 関数で，$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f''(x)\big|^2 dx < \infty$ である．$f(x)$ の推定量を

$$\hat{f}_{n,h}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \phi\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

とする．ただし, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ で, $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ $(-\infty < z < \infty)$ である．

(1) 任意の $x, a \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x+a) = f(x) + af'(x) + a^2 \int_0^1 (1-t) f''(x+at)\,dt$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ に対して,

$$E\left[\hat{f}_{n,h}(x)\right] - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x - hz) - f(x)\Big)\phi(z)\,dz$$

が成り立つことを示せ.

(3) 定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(E\left[\hat{f}_{n,h}(x)\right] - f(x)\right)^2 dx \le Ch^4$$

が成り立つことを示せ.