数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ a, b を実数の定数として関数 $f(x,y)$, $g(x,y)$, $F(x,y)$ を次のように定義する．

$$f(x,y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}), \quad g(x,y) = \arctan\frac{y}{x}, \quad F(x,y) = \exp(ax-by)\cos(bx+ay).$$

次の問いに答えよ．ただし $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である．

(1) $\Delta f(x,y)$, $\Delta g(x,y)$, $\Delta F(x,y)$ を求めよ．

(2) $f_x g_x = -f_y g_y$ および $f_x^2 + f_y^2 = g_x^2 + g_y^2$ を示せ．

(3) $G(x,y) = F(f(x,y), g(x,y))$ とする．$\Delta G(x,y)$ を求めよ．

$\boxed{2}$ 成分がすべて整数である行列を整数行列と呼ぶ．

(1) A を正則な整数行列とする．A の逆行列がまた整数行列になるための必要十分条件は $\det A$ が 1 または -1 であることを示せ．

(2) 行列 A を次式

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で与える．このとき A^{-1} は整数行列であることを示せ．

$\boxed{3}$ 区間 (α, β) 内の一点 x_0 をとり，$y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ とする.

(1) f, r を (α, β) 上の連続関数として，以下の初期値問題を解け.

$$\frac{dy}{dx}(x) + f(x)y(x) = r(x),\ x \in (\alpha, \beta)\ ,$$
$$y(x_0) = y_0\ .$$

(2) 前問 (1) を使い，次の初期値問題の解が一つしかないことを証明せよ.

$$\left(\frac{d}{dx} - f_1(x)\right)\left(\frac{d}{dx} - f_2(x)\right)\left(\frac{d}{dx} - f_3(x)\right) y(x) = 0\ ,\quad x \in (\alpha, \beta)\ ,$$

$$y(x_0) = y_0\ ,\quad \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = y_2\ .$$

ただし，$f_1, f_2, f_3 \in C^2((\alpha, \beta))$ である.

(3) 次の初期値問題を解け.

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} - \frac{2}{x}\right)\left(\frac{d}{dx} - x^2\right) y(x) = 0\ ,\quad x \in (0, 2)\ ,$$

$$y(1) = 0\ ,\quad \frac{dy}{dx}(1) = 1\ ,\quad \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 3\ .$$

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ.

(1) 広義積分

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{ax}{x^2+4}\right) dx$$

が収束するために，実数 a が満たすべき条件を求めよ.

(2) 広義積分

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{\log(1+e^{ax})}{x^2+4}\right) dx$$

が収束するために，実数 a が満たすべき条件を求めよ.

$\boxed{5}$ (1) 確率変数 Y は平均 α/λ, 分散 α/λ^2 のガンマ分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$ $(\alpha>0,\ \lambda>0)$ に従うとする．Y の積率母関数 $E\{\exp(tY)\}$ (t は実数，$t<\lambda$) を求めよ．ここに，ガンマ分布 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$ の確率密度関数は以下で与えられる．

$$f_Y(y)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}\quad (y>0).$$

ただし $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du$ はガンマ関数である．

(2) 確率変数列 $X_1,X_2,\ldots,X_n$（n は 3 以上の自然数）は独立かつ同一に平均 $1/\lambda$ $(\lambda>0)$ の指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$ に従うとする．ここに，指数分布 $\mathrm{Ex}(\lambda)$ の確率密度関数は以下で与えられる．

$$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}\quad (x>0).$$

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ の標本平均 $\overline{X}_n$ の積率母関数 $E\{\exp(t\overline{X}_n)\}$ $(t<\lambda)$ を求めよ．

(3) 前問 (2) の標本平均 $\overline{X}_n$ について

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\left(\frac{1}{\overline{X}_n}-\lambda\right)^2\right\}=0$$

を示せ．

$\boxed{6}$ N を正の偶数とし，N_1 を二項分布 $B(N,\frac{1}{2})$ に従う確率変数，$N_2=N-N_1$ とおく．$0<p_1<1,\ 0<p_2<1$ とし $q_1=1-p_1,\ q_2=1-p_2$ とおく．確率変数 M_1 と M_2 は，N_1, N_2 が与えられた下で，独立に $B(N_1,p_1)$ と $B(N_2,p_2)$ に従うとする．

(1) N_1, N_2 が与えられた下での条件付き分散 $V\left(\dfrac{M_1+M_2}{N}\middle|N_1,N_2\right)$ を求めよ．

(2) 分散 $V\left(\dfrac{M_1+M_2}{N}\right)$ を求めよ．

(3) $N_1=N_2=\frac{1}{2}N$ であるとき，次の不等式

$$V\left(\frac{M_1+M_2}{N}\middle|N_1=\frac{1}{2}N,N_2=\frac{1}{2}N\right)\le\frac{(p_1+p_2)(q_1+q_2)}{4N}$$

を証明し等号成立条件を求めよ．

数理科学 II

以下の１１問の中から４問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $z^n + 1 = 0$ の解を複素数の範囲ですべて求めよ．

(2) 複素平面内の原点 O を中心とした半径 r の円上の 2 点 A, B をそれぞれ $r,\, r\,e^{i\frac{2\pi}{n}}$ で定める．原点を中心とする扇形の周 OABO を積分路として $\dfrac{1}{1+z^n}$ を積分することにより

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}dx$$

の値を求めよ．ただし，n は $n \geq 2$ なる自然数とする．

$\boxed{2}$ 成分が実数で，${}^tTT = E$ を満たす正方行列 T を直交行列という．ただし ${}^tT$ は T の転置行列で E は単位行列を表す．T を相異なる 3 つの固有値をもつ 3×3 の直交行列とする．複素数を成分にもつベクトル $\boldsymbol{u}$ に対し，$\overline{\boldsymbol{u}}$ は成分がその複素共役であるベクトルを表すものとする．

(1) $\boldsymbol{u}$ を T の固有ベクトルとする．${}^t\overline{\boldsymbol{u}}\,T\boldsymbol{u}$ を考えることにより，T の固有値は絶対値が 1 の複素数であることを示せ．

(2) T の 3 つの固有値は $e^{i\theta}, e^{-i\theta}, \varepsilon$ と与えられることを示せ．ただし，$0 < \theta < \pi$ で，$\varepsilon = 1$ または $\varepsilon = -1$ である．

(3) 上問 (1) と同様の方法を用いて，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が T の相異なる固有値に対する固有ベクトルのとき ${}^t\overline{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{v} = 0$ となることを示せ．

(4) T の固有値 $e^{i\theta}, e^{-i\theta}, \varepsilon$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ をうまくとれば，

$$P = (\boldsymbol{w}_1\, \boldsymbol{w}_2\, \boldsymbol{u}_3), \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2), \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)$$

とおいたときに P が直交行列になり，

$${}^tPTP = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ．

$\boxed{3}$ 領域 $[0,1]\times[0,1]$ 上の 2 変数関数 $g(x,y)$ を次のように定める.

$$g(x,y)=\begin{cases} y(1-x) & (y\le x),\\ x(1-y) & (y>x).\end{cases}$$

さらに ω を 0 でない実数とする.

(1) 連続関数 f が次の積分方程式

$$f(x)=\omega^2\int_0^1 g(x,y)f(y)dy \tag{I}$$

を満足するものとする．このとき関数 f は 2 回微分可能であることを示し，さらに f の満たす微分方程式を求めよ.

(2) 積分方程式 (I) が $f\equiv 0$ 以外の解をもつための ω の条件を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下を示せ.

(1) X は内積 (,) を備えた実数体上のベクトル空間とし, $\|\ \|$ をそのノルム, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$ を正規直交系とするとき, ベッセルの不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(f,\varphi_i)|^2\le\|f\|^2,\qquad f\in X$$

が成り立つ.

(2) $\mathbb{R}$ 上で連続微分可能, かつ周期 2π の実関数 f のフーリエ係数

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\ dx,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\ dx$$

は

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2)<+\infty$$

を満たす.

(3) 前問 (2) と同じ条件の下で, f のフーリエ級数の部分和

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

は $n\to\infty$ のとき $\mathbb{R}$ 上一様収束する.

$\boxed{5}$ $1 < p < \infty$ とする. $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ は次の条件を満たすとする.

$$\int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^p dx < +\infty.$$

また, ある $\mathbb{R}$ 上の関数 f が

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty$$

を満たし, かつ

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p'} dx < +\infty \tag{I}$$

を満たす任意の $\mathbb{R}$ 上の関数 g に対して

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_j(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$$

を満たすとする. ここで, p' は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ を満たす実数である. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $g = |f|^{p-1}\mathrm{sgn}(f)$ は (I) を満たすことを示せ. ここで, $\mathrm{sgn}(t)$ は次のように定義される関数である.

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & (t > 0), \\ 0 & (t = 0), \\ -1 & (t < 0). \end{cases}$$

(2) 次の関係式を示せ.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_j(x)|^p dx. \tag{II}$$

(3) 上の不等式 (II) において, 等号が成立しない $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ および f の例を挙げよ.

$\boxed{6}$ 正値確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で，同一の確率密度関数

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (x > 0,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0)$$

をもつとする．X_1 の平均と分散をそれぞれ α と β とおく．

(1) α と β を μ と σ^2 を用いて表せ．

(2) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を用いて α と β の最尤推定量を求めよ．

$\boxed{7}$ 確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は独立で，確率密度関数

$$p(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & (x > \theta), \\ 0 & (x \leq \theta) \end{cases}$$

を持つとする．ただし $\theta > 0$ とする．また，$Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とおく．

(1) Y_n の平均と分散を求めよ．

(2) Y_n は θ の一致推定量であることを示せ．

(3) 正数列 $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が

$$\lim_{n\to\infty} P\left(c_n^{-1}(Y_n - \theta) \leq 1\right) = \frac{1}{2}$$

を満たすとき，そのような $\{c_n\}$ を一つ求めよ．

$\boxed{8}$ ダーツにおいてその得点は，ダーツの当たった位置と，的の中心からの距離が 1 以下のときは 10 点，距離が 1 より大きく 2 以下のときは 6 点，距離が 2 より大きく 3 以下のときは 2 点，その外側のときは 0 点であるとする．ある機械でダーツ投げをするとき，ダーツの当る位置は，的の中心から横方向，縦方向ともに正規分布 $N(0,\theta)$ に従い，横方向と縦方向は独立であるとする．ただし, $\theta > 0$ である．このとき，ダーツを 1 回投げたときの得点の期待値を求めよ．また，この機械がダーツを 1 回投げたところ得点は 6 点であった．θ の最尤推定値を求めよ．

$\boxed{9}$ X, Y, Z は二値の確率変数で，$(X,Y,Z) = (x_i, y_j, z_k)$ の確率を $p(x_i, y_j, z_k)$ $(i,j,k = 1,2)$ と表す．また，$X = x_i$ が与えられたとき $Y = y_j$ となる条件付き確率を $p(y_j|x_i)$，$X = x_i$ が与えられたとき $(Y,Z) = (y_j, z_k)$ となる条件付き確率を $p(y_j, z_k|x_i)$ と表す．これらの確率および条件付き確率はすべて正であると仮定する．以下の問いに答えよ．

(1)

$$\left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{p(y_j|x_i)}\right)^{-1} \geq \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{p(y_j, z_1|x_i)}\right)^{-1} + \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{p(y_j, z_2|x_i)}\right)^{-1}$$

を証明せよ．

(2)

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{p(y_1|x_i)p(y_2|x_i)} \leq \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{p(x_i, y_j, z_1)}\right)^{-1} + \left(\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{p(x_i, y_j, z_2)}\right)^{-1} \right\}^{-1}$$

を証明せよ．

$\boxed{10}$ X, Y は独立で，ともに標準コーシー分布に従うとする．このとき任意の定数 $0 < a < 1$ に対して $aX + (1-a)Y$ は標準コーシー分布に従うことを示せ．ただし標準コーシー分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

で与えられる．

$\boxed{11}$ 一辺の長さ 2 の正方形の内部にランダムに点 P をとる．すなわち点 P は正方形の内部に一様に分布する．P に最も近い正方形の周上の点を B とし，PB 上にランダムに点 Q をとる．すなわち点 P が与えられた下で，点 Q は PB 上に一様に分布する．PB の長さを X，PQ の長さを Z，PQ を半径とする円の面積を $Y = \pi Z^2$ とする．

(1) X の確率密度関数を求めよ．

(2) $X = x$ $(0 < x \leq 1)$ のときの Y の条件付き分布の確率密度関数を求めよ．

(3) 期待値 $E(Y)$ を求めよ．