数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ $f(x), F_1(x), \cdots, F_n(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の C^2 級関数で $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), \cdots, F_n(x))$ とする．ただし $x = (x_1, \cdots, x_n)$ である．$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ で $\mathbb{R}^n$ 上の標準ノルムを表す．また, 演算子 ∇, $\nabla\cdot$ および Δ を次のように定義する.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{F} + f(\nabla \cdot \mathbf{F})$ を示せ．ただし, $(\nabla f) \cdot \mathbf{F}$ は ∇f と $\mathbf{F}$ の内積とする.

(2) $\nabla \cdot (|x|^k x)$ および $\Delta |x|^k$ (k は 2 以上の自然数) を計算せよ.

$\boxed{2}$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，次の問いに答えよ.

(1) A を直交行列によって対角化せよ.

(2) $B^2 = A$ となる行列 B を 4 つ求めよ.

$\boxed{3}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+2xy\cos\alpha)} dxdy$$

とおく.

(1) $I\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を求めよ.

(2) $0 < \alpha < \pi$ に対して $I(\alpha)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 次の微分方程式の初期値問題 (1) と (2) について, 各々のすべての解を求めよ.

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{x}, \quad x \geq 0, \quad x(0) = 0.$

(2) $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad x(0) = 0.$

$\boxed{5}$ 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で，X_i はガンマ分布 $Ga(\alpha_i, \beta)$ に従うとする $(i = 1, \ldots, n)$. ここで $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i\,(> 0)$ は定数，$\beta\,(> 0)$ は未知母数である．c_i $(i = 1, \ldots, n)$ を実数とし，$\widehat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ とおく．なお，ガンマ分布 $Ga(\alpha, \beta)$ の確率密度関数は

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \qquad (x > 0;\ \alpha > 0,\ \beta > 0)$$

であり，$\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad (\alpha > 0)$$

である．

(1) $\widehat{\beta}$ が β の不偏推定量となるための条件を導け．

(2) (1) の条件の下で，分散 $\mathrm{Var}\big(\widehat{\beta}\big)$ を最小にする c_i $(i = 1, \ldots, n)$ を定めよ．

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数値確率変数 X は確率密度関数 $f(x)$ をもち，$E(|X|) < \infty$ とする．また，m を X の確率分布のメディアン (中央値) とする．このとき，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，

$$E(|X - a|) = E(|X - m|) + 2\int_m^a (a - x) f(x) dx$$

が成り立つことを示せ．

(2) 確率変数 X が確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2}\right\} \qquad (x > 0;\ -\infty < \mu < \infty)$$

をもつとする．また，$a \in \mathbb{R}$ とする．このとき，$E(|X - a|)$ が最小となる a を μ を用いて表せ．

数理科学 II

以下の９問の中から４問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1)
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{1}{2}(|t+1|+|t-1|-2|t|)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx, \quad t\in\mathbb{R}$$
を示せ.

(2) 定積分
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$$
の値を求め，(1) の計算を完結させせよ.

$\boxed{2}$ A を実対称行列とし, ベクトルの内積を $\cdot$ で表す.

(1) A のすべての固有値が非負であることと, すべての実ベクトル x に対して $Ax\cdot x\geq 0$ が成り立つことは同値であることを示せ.

(2) A が $(n+1)$ 次実正方行列
$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n & a_1 \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}$$
で与えられるとき, その固有値の最小のものと最大のものを求めよ. ただし
$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$
とする.

(3) (2) の A に対してそのすべての固有値を定めよ.

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ が収束することを示せ (極限値は求めなくてよい).

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ を中心とするテイラー級数とその収束半径を求めよ.

(3) $0<u<v<1$ を満たす実数 u, v を任意にとって固定する.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \log x$ は $[u, v]$ 上で $\dfrac{\log x}{1-x}$ に一様収束することを示せ.

(b) $\displaystyle\int_u^v \frac{\log x}{1-x} dx = \log(1-u)\log u - \log(1-v)\log v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} v^n$ を示せ.

(4)

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

を示せ.

$\boxed{4}$ 関数 g は $[0, \infty)$ 上で定義された

$$g(x+1) = g(x), \quad x \geq 0$$

を満たす周期 1 の連続関数とする. $[0, 1]$ 上のリプシッツ連続な関数 f に対して

$$F_n = \int_0^1 f(x) g(nx) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と定める. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 次の等式を示せ.

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 f\left(\frac{k+y}{n}\right) g(y) dy.$$

(2) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k\leq n-1} \max_{x\in[0,1]} \left| f\left(\frac{k+x}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|.$$

(3) $\langle f \rangle = \int_0^1 f(x) dx$, $\langle g \rangle = \int_0^1 g(x) dx$ とおくとき,

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \langle f \rangle \langle g \rangle$$

となることを示せ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}$ 上の関数 h を次のように定める：

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

$[0,1]$ 上の連続関数 f に対して，関数 Hf を

$$(Hf)(t) = \int_0^1 h(t-s)f(s)ds$$

と定義する．このとき，恒等的にゼロでないような $f \in C^2[0,1]$ が存在して，

$$-(H^2 f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in [0,1]$$

となるような λ をすべて求めよ．ここで $H^2 f$ は

$$(H^2 f)(t) = \int_0^1 h(t-s)(Hf)(s)ds$$

と定義される関数である．

$\boxed{6}$ 確率変数 X, Y は独立にそれぞれ次の確率密度関数をもつ指数分布に従うとする.

$$f(x) = e^{-x} \qquad (x > 0), \qquad g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \qquad (y > 0)$$

ただし，$\lambda > 0$，$\lambda \neq 1$ である．さらに $Z = X + Y$ とおく.

(1) Z の確率分布の確率密度関数 $h(z)$ を求めよ.

(2) Z の確率分布の平均およびモード (最頻値) を求めよ.

(3) $\lambda = \dfrac{1}{2}$ のとき，Z の確率分布のメディアン (中央値) はモードより大きく，平均より小さいことを示せ.

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ.

(1) 実数値確率変数 X, Y とボレル可測関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $E(|Y|^2) < \infty$, $E\{|g(X)|^2\} < \infty$ を満たすとする．また，$E(Y|X)$ は X を与えたときの Y の条件付き平均とする．このとき,

$$E\left[\{Y - g(X)\}^2\right] \;\geq\; E\left[\{Y - E(Y|X)\}^2\right]$$

が成り立つことを示せ.

(2) 確率ベクトル (X, Y) が次の確率密度関数 $f(x, y)$ をもつ 2 変量正規分布に従うとする.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} Q(x, y)\right) \qquad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$$

ただし,

$$Q(x, y) = \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2},$$

$\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $|\rho| < 1$ である．このとき，$X = x$ を与えたときの Y の条件付き平均 $E(Y|X = x)$ を求めよ.

$\boxed{8}$ 大きさ N の有限母集団 $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N\}$ の中から, 非復元抽出で大きさ n の標本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を無作為に取り出す．ただし，θ_i $(i = 1, \ldots, N)$ は実数で，$2 \leq n < N$ である．

(1) X_1 の分布の平均 μ と分散 σ^2 を求めよ．

(2) X_1 と X_2 の共分散を N, σ^2 を用いて表せ．

(3) 標本平均 $\bar{X} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の分布の分散を求めよ．

$\boxed{9}$ X を二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数，$\widehat{p}_n = X/n$ を p の不偏推定量とする．ここで $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ である．必要ならば中心極限定理を用いてもよい．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\downarrow 0} P\left(\widehat{p}_n - \sqrt{\frac{p}{n}} \leq p \leq \widehat{p}_n + \sqrt{\frac{p}{n}}\right) = 1$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{p\downarrow 0} P\left(\widehat{p}_n - \sqrt{\frac{\widehat{p}_n}{n}} \leq p \leq \widehat{p}_n + \sqrt{\frac{\widehat{p}_n}{n}}\right) = 0$$

(3) 次式の値を求めよ．

$$\lim_{p\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} P\left(\widehat{p}_n - \sqrt{\frac{p}{n}} \leq p \leq \widehat{p}_n + \sqrt{\frac{p}{n}}\right)$$