数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 2 変数関数 $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ がある．また

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \quad r > 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) 原点以外の各点 (x, y) において, 線形独立なベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{e}_1 + B\boldsymbol{e}_2$$

と表示する．成分 A, B を (r, θ) の関数として表せ.

(2) 関数

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$$

を A, B およびそれらの r, θ に関する微分を用いて表せ.

$\boxed{2}$ a, b を実数とする．以下の問いに答えよ.

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2a-4 & -3 \\ a-1 & -a-1 & -3 \\ -2a-4 & 2a+4 & 1 \end{pmatrix}$$

が正則になるための a の条件を述べよ.

(2) 行列

$$B = \begin{pmatrix} 2b+1 & -2b-2 & b-2 \\ 2b-1 & -2b & b-2 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

が対角化可能になるための b の条件を述べよ.

$\boxed{3}$ α を正の実数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 0,\ xy \leq 1,\ x \geq y\}$ とする. 広義積分

$$\iint_A \frac{1}{x^\alpha}\, dx\, dy$$

が収束するような α の範囲を求めよ.

(2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \leq 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}$ とする. 広義積分

$$\iint_B \frac{1}{x^\alpha + y^\alpha}\, dx\, dy$$

が収束するような α の範囲を求めよ.

$\boxed{4}$ k を自然数, r を $0 < r < 1$ を満たす実数とする. 複素積分

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^k (z-1)^2}$$

を求めよ.

$\boxed{5}$ 実数値確率変数列 $(X_n)_{n=1,2,\ldots}$ は独立で，各 X_n は区間 (α, β) 上の一様分布に従うとする．ただし $\alpha < \beta$ とする．また，$Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とする．

(1) Y_n の累積分布関数を求めよ．

(2) $Z_n - Y_n$ は $\beta - \alpha$ の (弱) 一致推定量であることを示せ．

$\boxed{6}$ 2 次元確率ベクトル (X, Y) は 2 次元正規分布に従い，その確率密度関数は

$$f(x, y|\rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(- \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right)$$
$$(-\infty < x,\ y < \infty;\ |\rho| < 1)$$

で与えられる．次の条件付き期待値を求めよ．

$$E\left[Y^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \log f(X, Y|\rho) \middle| X = x \right]$$

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 実数 x, y に対して $f(x,y) = y + xe^y - 1$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y) = 0$ が定める曲線を xy 平面上に図示せよ.

(2) $f(x, y(x)) = 0$ が定める陰関数 $y(x)$ が存在するような x の範囲を求めよ.

(3) 導関数 $y'(x)$ が存在するような x の範囲を求め，さらに $y'(x)$ を x と $y(x)$ を用いて表せ.

$\boxed{2}$ 実数 a に対し, $u(0) = 0$, $u(1/2) = a$, $u(1) = 1$ を満たす $[0,1]$ 上の C^1 実数値関数 $u = u(x)$ 全体を X_a とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 各 $u \in X_a$ に対して

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx \geq 4a^2 - 4a + 2$$

が成り立つことを示せ.

(2) ある $u \in X_{1/2}$ が存在して $\displaystyle\int_0^1 u'(x)^2 dx = 1$ となることを示せ.

$\boxed{3}$ $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ として,

$$\Gamma_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > 0,\ y = \frac{1}{n} \log x \right\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n,$$
$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0,\ x \geq 0,\ y \leq 0\}$$

とおく．以下の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ における A の内部を $\mathring{A}$，閉包を $\bar{A}$，境界を ∂A と表すとき,

$$\mathring{A} = \emptyset, \quad \bar{A} = A \cup \Gamma, \quad \partial A = A \cup \Gamma$$

であることを示せ．ここで $\emptyset$ は空集合である.

(2) A の 2 次元ルベーグ測度を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ.

(1) $\zeta, z \in \mathbb{C}$（$\zeta \neq z$）に対して, 等式

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\mathrm{Re}(z)$ は z の実部を表す.

(2) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $h = h(e^{i\theta})$（$0 \leq \theta < 2\pi$）を C 上連続な実数値関数とする．関数

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\theta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} d\theta$$

は B において $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ を満たすことを示せ．ただし, $z = x + iy$（$x, y \in \mathbb{R}$）とする.

$\boxed{5}$ 区間 $I = [0,1]$ 上の連続関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots, f$ に対し, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu\bigl(\bigl\{x \in I \bigm| |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\bigr\}\bigr) = 0$$

が成り立つとき, 関数列 $\{f_n\}$ は f に測度収束するという. ただし, $\mu(A)$ は集合 A の 1 次元ルベーグ測度である. 以下の問いに答えよ.

(1) $\{f_n\}$ が f に測度収束し, さらに $\max_{x\in I} |f_n(x)|$ が n について有界ならば, 関数列 $\{F_n\}$ は F に I 上で一様収束することを示せ. ただし

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt,$$
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

とする.

(2) I 上の関数列 $\{f_n\}$:

$$f_n(x) = \sin n\pi x$$

は, いかなる連続関数 f にも測度収束しないことを示せ.

$\boxed{6}$ 定数 $a, b > 0$ に対して

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

とおく. 2 次元確率ベクトル (X,Y) は D 上で一様に分布している. すなわち, 各 $E \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$P((X,Y) \in E) = \frac{\text{“}D \cap E\text{ の面積”}}{\text{“}D\text{ の面積”}}$$

が成り立つ. ただし, $P(A)$ は事象 A の確率である. 以下の問いに答えよ.

(1) 各 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(X \le x_0, Y \le y_0) = \int_{-\infty}^{x_0}\int_{-\infty}^{y_0} f(x,y)dxdy$$

を満たす関数 $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ を求めよ.

(2) $Z = \dfrac{X}{a} + \dfrac{Y}{b}$ とする. 各 $z_0 \in \mathbb{R}$ に対して

$$P(Z \le z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} g(z)dz$$

を満たす関数 $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ を求めよ.

(3) $(X,Y) = (aR\cos\Theta, bR\sin\Theta)$ $(R \ge 0,\ 0 \le \Theta < 2\pi)$ とする. 各 $r_0 \ge 0,\ 0 \le \theta_0 < 2\pi$ に対して

$$P(R \le r_0, \Theta \le \theta_0) = \int_0^{r_0}\int_0^{\theta_0} h(r,\theta)drd\theta$$

を満たす関数 $h : [0,\infty) \times [0,2\pi) \to [0,\infty)$ を求めよ.

$\boxed{7}$ 正値確率変数 X に対して $\log X$ は標準正規分布に従うとし，定数 $\alpha > 0$ に対して $Y_\alpha = X^\alpha$ と定める．以下，確率変数 Z の累積分布関数を F_Z，標準正規分布の累積分布関数を Φ と書くことにする．また，Φ^{-1} は Φ の逆関数とする．

(1) X と Y_α の相関係数を $\mathrm{Corr}(X, Y_\alpha)$ と書くとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{Corr}(X, Y_\alpha)$$

(2) 確率変数 $\widetilde{X}$ を次式で定める．

$$\widetilde{X} = \Phi^{-1}(F_X(X))$$

このとき，$\widetilde{X}$ は標準正規分布に従うことを示せ．

(3) 確率変数 $\widetilde{Y}_\alpha$ を次式で定める．

$$\widetilde{Y}_\alpha = \Phi^{-1}(F_{Y_\alpha}(Y_\alpha))$$

これと (2) の $\widetilde{X}$ に対して，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{Corr}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}_\alpha)$$

$\boxed{8}$ 確率変数 X はコーシー分布に従うとする．このとき

$$Z = \log |X|$$

が従う分布の確率密度関数を求めよ．また，$E[|Z|] < \infty$ であることを示し，$E[Z]$ を求めよ．なお，コーシー分布の確率密度関数は次式で与えられる．

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$\boxed{9}$ $X_1, \ldots, X_n$ を平均 1 の指数分布に従う母集団からの大きさ n の無作為標本とし，この標本の度数分布を考える．$R_n = \max_{1 \le i \le n} X_i - \min_{1 \le i \le n} X_i$ とする．階級の数を Sturges の公式 $k_n = \lceil 1 + \log_2 n \rceil$ によって定め，階級の幅を $d_n = \dfrac{R_n}{k_n}$ とする．このとき，極限値

$$\lim_{n \to \infty} E[d_n]$$

を求めよ．ここで，$\lceil x \rceil$ は天井関数で x 以上の最小の整数を表す.

$\boxed{10}$ 実数値確率変数 X の分布の確率密度関数を $f(x|\theta) = \max\{0, 1 - |x - \theta|\}$ とする．実数 θ は未知パラメータである．有意水準を α，帰無仮説を $H_0 : \theta = 0$ とする仮説検定を行う．ただし，$0 < \alpha \le 0.05$ とする．H_0 が正しいときに誤って H_0 を棄却してしまう確率が α に等しくなるような検定を考える.

(1) 対立仮説を $H_1 : \theta \neq 0$ とする．$|X| > c$ のとき H_0 を棄却する．定数 c を求めよ.

(2) 対立仮説を $H_2 : \theta > 0$ とする．$X > d$ のとき H_0 を棄却する．定数 d を求めよ.

(3) 対立仮説が H_2 のとき，(1) で求めた検定と (2) で求めた検定はどちらが望ましいか．理由を付して解答せよ.