数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{7}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 関数とし, 変換

$$x = x(u,v) = \cosh u\ \sin v, \quad y = y(u,v) = \sinh u\ \cos v$$

を考える．ただし

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

である．以下を示せ．

(1) $\sinh^2 u\ \sin^2 v + \cosh^2 u\ \cos^2 v = \frac{1}{2}(\cosh 2u + \cos 2v)$

(2) $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ に対し

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{1}{2}(\cosh 2u + \cos 2v)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$\boxed{2}$ 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) A のすべての固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

(2)「$\mathbb{R}^3$ の点列 $\{A^n \boldsymbol{x}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{x}$ に収束する」という性質を持つ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ．

$\boxed{3}$ Log はその主値をとるものとする. 以下を示せ.

(1) $|z| < 1$ に対して

$$\frac{\mathrm{Log}(1+z)}{z} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots$$

(2) $0 < r < 1$ に対して

$$\int_0^{\pi} \log(1 + 2r\cos\theta + r^2)\, d\theta = 0$$

(3) $r > 1$ に対して

$$\int_0^{\pi} \log(1 + 2r\cos\theta + r^2)\, d\theta = 2\pi \log r$$

$\boxed{4}$ 閉区間 $[0, R]$ 上の連続関数 f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は

$$|f_{n+1}(r)| \leq \int_0^r \left(\int_0^s |f_n(t)|\, dt \right) ds$$

を満たすものとする. また $F_n(r) = \max_{0 \leq t \leq r} |f_n(t)|$ とおく. 以下を示せ.

(1) $F_{n+1}(r) \leq \displaystyle\int_0^r sF_n(s)\, ds$

(2) $F_3(r) \leq \dfrac{1}{8} r^4 F_1(r)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \max_{0 \leq r \leq R} |f_n(r)| = 0$

$\boxed{5}$ 連立常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + 4xy^2 - 4x - 8y$$
$$\frac{dy}{dt} = x^2 y + 4y^3 - 4y + 2x$$

の, 初期条件 $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ を満たす解 $(x(t), y(t))$, $t \geq 0$ を考える. また $V(x, y) = x^2 + 4y^2$ とおく. 以下の設問に答えよ.

(1)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} V(x(t), y(t)) = 0$$

となる (x_0, y_0) の集合を求めよ.

(2) $t \to \infty$ のとき $(x(t), y(t))$ が $(0, 0)$ に収束するような (x_0, y_0) の集合を求めよ.

(3) $(x(t), y(t))$ が有界となるような (x_0, y_0) の集合を求めよ.

$\boxed{6}$ 1 次元標準正規分布の確率密度関数と累積分布関数をそれぞれ $\phi(x)$，$\Phi(x)$ と書く．$a\,(\neq 0)$ と $b\,(\in \mathbb{R})$ を実定数とする．次を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(ax)\Phi(bx)dx = \frac{1}{2|a|}$$

$\boxed{7}$ 実数 θ は $|\theta| \leq 1$ を満たすとする．確率分布 P_θ は確率密度関数

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\big(1 + \theta \sin x\big), & x \in (-\pi, \pi] \\ 0, & x \notin (-\pi, \pi] \end{cases}$$

をもつ．以下の設問に答えよ．

(1) 確率分布 P_θ の平均 μ_θ を求めよ．

(2) $n \geq 1$ とする．確率分布 P_θ からの無作為標本を $X_1, \ldots, X_n$ とする．パラメータ θ の不偏推定量を 1 つ構成し，その分散を求めよ．

数理科学 II

以下の 9 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 実数 x と $t > 0$ に対して

$$p(t,x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

とおく．以下を示せ．

(1) n 次多項式 $q_n(x)$ が存在して

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} p(t,x) = \frac{1}{t^{n/2}} q_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

(2) x, t に依存しない正の定数 β_n, C_n が存在して

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial x^n} p(t,x)\right| \le \frac{C_n}{t^{n/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{\beta_n t}\right)$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ を満たす実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ の集合を X として, X 上の距離 d を

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|, \quad x = (x_n)_{n=1}^{\infty},\ y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$$

とする．このとき

$$A = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \;\middle|\; |x_n| < 1,\ n = 1, 2, \ldots \right\}$$

は X の開集合であることを示せ.

$\boxed{3}$ f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, f は閉区間 $[0, 1]$ 上の C^1 関数で,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

を満たすものとする．以下の設問に答えよ.

(1) 次を満たさない f_n $(n = 1, 2, \ldots)$, f の例を与えよ:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \qquad (*)$$

(2) 仮定

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in[0,1]} |f_n'(x)| < \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(0)| < \infty$$

の下で $(*)$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{4}$ 定数 $\gamma > 0$, $U(t) = (1 + t)^{-1}$, 連続関数 $g(t) \geq 0$ に対し, $A = A(t) \geq 0$ は

$$\frac{dA}{dt} + (\gamma - U)A \leq Ug, \quad t \geq 0$$

を満たすものとする．また

$$\int_0^\infty (1 + t)^{-2} g(t)\ dt < \infty$$

が成り立つとする．以下を示せ.

(1) $\sup_{t\geq 0} (1 + t)^{-1} A(t) < \infty$

(2) $\lim_{t\to\infty} (1 + t)^{-1} A(t) = 0$

(3) さらに $\lim_{t\to\infty} (1 + t)^{-1} g(t) = 0$ ならば $\lim_{t\to\infty} A(t) = 0$

$\boxed{5}$ 実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立で，各 X_n は標準正規分布に従う．これと定数 $a > 0$ を用いて，確率変数列 $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$Y_n = aY_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で定義する．ただし $Y_0 = 0$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $Z_n = Y_n/a^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ の分布を求めよ．

(2) $a > 1$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} E\left[|Z_\infty - Z_n|^2\right] = 0$$

を満たす 2 乗可積分確率変数 Z_∞ が存在することを示せ (このとき $Z_\infty = L^2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Z_n$ と記す).

(3) $0 < a < 1$ とする．$n \to \infty$ のとき Y_n の分布が収束することを示せ．また極限分布を求めよ．

(4) $0 < a < 1$ とする．$L^2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Y_n$ は存在するか．

$\boxed{6}$ $n \geq 2$ とする．実数値確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で，各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 μ, 分散 λ の正規分布に従うとする．ただし, $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ とする．

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - S_n)^2$$

とする．以下の設問に答えよ．

(1) $E[S_n]$ と $E[T_n]$ を求めよ．

(2) S_n と T_n が独立であることを示せ．

$\boxed{7}$ ある商店街では 1 等から 5 等までのいずれかが必ず当たるくじを開催している．3 等以上 (1 等から 3 等のいずれか) が当たる確率を θ_1, 4 等か 5 等のいずれかが当たる確率を $\theta_2 (= 1-\theta_1)$ とし，

$$\theta_1 \geq \frac{1}{3}\theta_2 \geq 0 \qquad (\star)$$

とする．$N \geq 1$ とする．N 人がくじを引いたとき，それぞれの結果は独立同分布に従うものとする． 以下の設問に答えよ．

(1) $(\star)$ の下，パラメータ θ_1 の範囲を求めよ．

(2) N 人がくじを引いたときに x 人 $(x = 0, 1, \ldots, N)$ が 3 等以上を当てる確率 $P(x)$ を θ_1 を用いて表せ.

(3) 今, N 人がくじを引いて 3 等以上を当てる人数を X とする．θ_1 のパラメータ空間を (1) で求めた範囲として，θ_1 の最尤推定量を N, X を用いて表せ.

(4) 前問で求めた最尤推定量が θ_1 の不偏推定量でないことを示せ.

(5) この商店街で 10 人がくじを引いたところ，次の結果を得た.

等級	人数
1 等	0
2 等	1
3 等	1
4 等	5
5 等	3

このとき，(3) で求めた最尤推定量の式を用いて, パラメータ θ_1 の推定値を求めよ.

$\boxed{8}$ $n \geq 1$ とする．確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で，各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は同一の指数分布に従い，次の確率密度関数

$$f(x|\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right), & x > 0 \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

をもつとする．ただし，$\mu > 0$ とする．$Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ の観測値 y を用いて有意水準 $\alpha \in (0, 1)$ の仮説検定を行う.

(1) 定数 $c > 0$ に対して $P(X_1 > c)$ と $P(Y > c)$ を計算せよ.

(2) 定数 $\mu_0 > 0$ に対して帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$，対立仮説 $H_1 : \mu > \mu_0$ の仮説検定を行う．$y > c$ のとき H_0 を棄却するとき，定数 c を定めよ.

(3) μ の $100(1-\alpha)$%の片側信頼区間における信頼下限 $d(y)$ を求めよ．すなわち

$$P(\mu \geq d(Y)) = 1 - \alpha$$

を満たす関数 $d(y)$ を n や α を用いて表せ.

$\boxed{9}$ 次の線形回帰モデルを考える．

$$y_i = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \geq 1$$

ただし，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T \in \mathbb{R}^p$ とし，$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^p$ は定数ベクトルであり，$\boldsymbol{\beta}^T$ は $\boldsymbol{\beta}$ の転置を表す．また，実数値確率変数列 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は独立同分布に従い，$E[\varepsilon_1] = 0$, $E[\varepsilon_1^2] = \sigma^2$, $\sigma^2 > 0$ とする．このとき，λ を正定数とし，次の関数

$$R_\lambda(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_i\right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{p} \beta_j^2$$

を最小とする $\boldsymbol{\beta}$ を $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$ を求めよ．ただし，$X = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ を用いてもよい．

(2) $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$ のとき，$E[\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)] \neq \boldsymbol{\beta}$ を示せ．

(3) $\lambda^* > \lambda$ とし，$\operatorname{rank} X = p$ とする．このとき，$\operatorname{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda^*)] < \operatorname{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)]$ であることを示せ．ここで，$\operatorname{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)]$ は $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$ の分散共分散行列を表し，実対称行列 A と B に対し，$A < B$ とは，$B - A$ が正定値行列となることである．

(4) 以上の結果を考慮して，$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda^*)$ は $\hat{\boldsymbol{\beta}}(\lambda)$ より良い推定量と言えるか理由を付して解答せよ．