数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 変数 (x_1, x_2), (r, θ) の間に関係

$$x_1 = x_1(r, \theta) = a_1 r \sin\theta, \quad x_2 = x_2(r, \theta) = a_2 r \cos\theta$$

が成り立つものとし, C^1 関数 $f = f(x_1, x_2)$ に対して

$$F = F(r, \theta) = f(x_1(r, \theta), x_2(r, \theta))$$

とおく．ただし，$r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする．また $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{a_1^2 y_1^2 + a_2^2 y_2^2}$ とする. ただし $a_1, a_2 > 0$ は定数である.

(1) $\|\nabla f(x_1, x_2)\|^2$ を r, θ, F を用いて表せ.

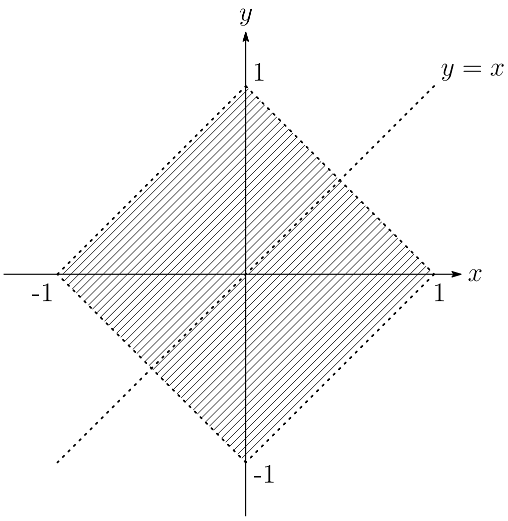
(2) $x_1 x_2$ 平面上の曲線を $\Gamma(c) : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = c$ とする. ただし $c > 0$ は定数である. $f(x_1, x_2)$ が各 $\Gamma(c)$ 上で一定の値をとるならば, $\|\nabla f(x_1, x_2)\|$ も同様であることを示せ.

$\boxed{2}$ $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底とする.

(1) $\mathbf{y}_1 = -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_2 = 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$, $\mathbf{y}_3 = -3\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - 2\mathbf{x}_3$ は線形独立であることを示せ.

(2) $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ に対してグラム・シュミットの直交化法を適用し, 得られた正規直交基底を $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ を用いて表せ.

$\boxed{3}$ 広義積分 $\displaystyle\iint_D |x-y-\sin(x-y)|^p dxdy$ が収束するような $p<0$ の範囲を求めよ．ただし，$D=\Omega\setminus\Gamma$ であり，Ω は 4 点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ を頂点とする正方形の内部，Γ は直線 $y=x$ とする．



$\boxed{4}$ 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は，任意の $x,y\in\mathbb{R}$, $0\le\lambda\le 1$ に対して

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

を満たすものとする．

(1) 任意の実数 $x_1,\dots,x_n$ と，$\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i=1$ を満たす任意の非負実数 $p_1,\dots,p_n$ に対して

$$f\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right)\le \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

が成り立つことを，n に関する帰納法で示せ．

(2) 正定数 $c_1,\dots,c_n,A$ に対して

$$\mathcal{A}=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n c_i x_i = A\right\}$$

とする．$M=\displaystyle\min_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathcal{A}}\sum_{i=1}^n c_i f\left(x_i\right)$ の値と，

$$M=\sum_{i=1}^n c_i f\left(x_i^*\right)$$

を満たす $(x_1^*,\dots,x_n^*)\in\mathcal{A}$ をひとつ求めて，$c_1,\dots,c_n,A,f$ を用いて表せ．

$\boxed{5}$ 実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立で同じ分布に従い，$E(X_n) = 0$，$E(X_n^4) < \infty$ を仮定する．$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) = 0$$

(2) n に依存しない定数 C が存在して次の関係式が成り立つことを示せ.

$$E\left[(X_1 + \cdots + X_n)^4\right] \leq Cn^2$$

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の関係式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} nP(|\overline{X}_n| \geq \varepsilon) = 0$$

$\boxed{6}$ 2 次元確率ベクトル (X, Y) が次の確率密度関数をもつ分布に従うとする.

$$f(x,y) = C\exp\left(-\alpha\sqrt{x^2+y^2+2\beta xy}\right), \quad -\infty < x, y < \infty$$

ただし，α, β, C は定数とし，$\alpha > 0$, $-1 < \beta < 1$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) C を α, β を用いて表せ.

(2) $\beta = 0$ とする．確率ベクトル (X, Y) の特性関数を $E[\exp\{i(tX + uY)\}]$, $(t, u \in \mathbb{R})$ で定める．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．このとき，ある関数 Ψ を用いて，特性関数が以下のように表されることを示せ.

$$E[\exp\{i(tX + uY)\}] = \Psi(t^2 + u^2)$$

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ A, B を正定値の n 次実対称行列とする. 以下を示せ.

(1) $A^{1/2}A^{1/2} = A$ を満たす正定値の実対称行列 $A^{1/2}$ がただ一つ存在する.

(2) $C = A^{-1/2}(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}A^{-1/2}$ は, $CAC = B$ を満たすただ一つの正定値の実対称行列である. ただし $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$ とする.

$\boxed{2}$ N を自然数とし, 複素平面上の 4 点 $N\pi \pm i\dfrac{\pi}{2}$, $-N\pi \pm i\dfrac{\pi}{2}$ を頂点とする長方形の周を C_N とする. ここで $i = \sqrt{-1}$ である.

(1) $z = x + iy$ に対して $\cos z = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x$ となることを示せ.

(2) $z \in C_N$ のとき, $|\cos z| \geq 1$ となることを示せ.

(3) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_N} \dfrac{1}{z\cos z}\,dz$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ $0 < \gamma \leq 1$ として, 常微分方程式

$$\ddot{x} + 6\gamma\dot{x} + 9x = 0, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 3$$

の解を $x_\gamma = x_\gamma(t)$ とする.

(1) $0 < \gamma < 1$ に対して $x_\gamma(t)$ を求めよ.

(2) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $y(t) = \displaystyle\lim_{\gamma \uparrow 1} x_\gamma(t)$ を求めよ.

(3) $y(t) = x_1(t)$ であることを示せ.

$\boxed{4}$ $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ は独立確率変数列で

$$P[X_n = 1] = P[X_n = -1] = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

を満たすものとし,

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする.

(1) 実数 θ に対して $f(\theta) = E[e^{i\theta X_1}]$ とする. ただし $i = \sqrt{-1}$ である. $f(\theta)$ の値を具体的に求めよ.

(2) 任意の非負整数 n と整数 k に対して

$$P[S_n = k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)^n e^{-ik\theta} \, d\theta$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) の結果を利用して, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P[S_n = 0]$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

$\boxed{5}$ n 次元単位球 $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ 上の C^2 関数 $u(x)$ に対して, $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ 上の関数を

$$v(y) = |x|^{n-2} u(x), \quad y = x/|x|^2$$

で定める. ただし $n \geq 2$ とする.

(1) u が $r = |x|$ のみの関数であるとして, $\Delta_y v = r^{n+2} \Delta_x u$ となることを導け.

(2) 一般に $u(x)$ が調和のときは, $v(y)$ も同様であることを示せ.

$\boxed{6}$ n を 2 以上の自然数とし，$\alpha, \beta > 0$ および $\theta = (\alpha, \beta)$ とする．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で同じ分布に従う．X_1 の従う確率分布は

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1} & (x \in [0, \beta]) \\ 0 & (x \notin [0, \beta]) \end{cases}$$

なる確率密度関数を持つとする．以下の設問に答えよ．

(1) 最尤推定量 $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ を求めよ．

(2) 最尤推定量 $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ の弱一致性，すなわち，任意の $\alpha, \beta > 0$, 任意の $\epsilon > 0$ で

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\hat{\alpha}_n - \alpha| + |\hat{\beta}_n - \beta| > \epsilon\right) = 0$$

を示せ．

$\boxed{7}$ 実数値確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ と実数値確率変数 X, Y が与えられているとする．X_n, X の分布関数をそれぞれ F_{X_n}, F_X とする．F_X の任意の連続点 x に対して，$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ のとき, X_n は X に分布収束するといい, $X_n \xrightarrow{d} X$ と表す．ここで，X が平均 $\mu \in \mathbb{R}$, 分散 $\sigma^2 > 0$ の正規分布に従う確率変数のときは $X_n \xrightarrow{d} N(\mu, \sigma^2)$ と書くことがある．さらに，$\mu_X \in \mathbb{R}$, $\mu_Y \in \mathbb{R}$, $\sigma_X^2 > 0$, $\sigma_Y^2 > 0$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 「$X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$ ならば $X_n - Y_n \xrightarrow{d} X - Y$」は一般に成り立つか否か．理由を付して解答せよ．

(2) $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ と $\{Y_m\}_{m=1}^\infty$ は独立とし，$\sqrt{n}(X_n - \mu_X) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_X^2)$, $\sqrt{m}(Y_m - \mu_Y) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_Y^2)$ とする．また, $\frac{n}{m} \to \frac{1}{2}$ $(n, m \to \infty)$ とする．このとき, 次が成り立つことを示せ．

$$\frac{X_n - Y_m - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$\boxed{8}$ 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ は互いに独立で，$i = 1, \ldots, n$ に対して，X_i は $N(\mu, \sigma_i^2)$ に従う．期待値 $E(X_i) = \mu \geq 0$ の値は未知であるが，分散 $V(X_i) = \sigma_i^2 > 0$ の値は既知とする．$Y_n = \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n$ を用いて，帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$，対立仮説 $H_1 : \mu > 0$ の仮説検定を行いたい．ただし β_i は $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$ を満たす正定数である．有意水準が α $(0 < \alpha < 1)$ となるように定数 c_n を定めて，$Y_n > c_n$ のとき H_0 を棄却する．標準正規分布の累積分布関数を Φ，その逆関数を Φ^{-1} で表す．以下の設問に答えよ．

(1) $n = 1$ のときの定数 c_1 を求めよ．

(2) $n \geq 2$ のときの定数 c_n を求めよ．

(3) 対立仮説 H_1 が正しいと仮定して，H_0 を棄却する確率を最大にするような $\beta_1, \ldots, \beta_n$ の値を求めよ．

$\boxed{9}$ $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ とする．X と Y を互いに独立で，それぞれ $N(\mu, \sigma^2)$ と $N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数とする．

$$\begin{aligned} &\text{帰無仮説} \quad H_0 : \mu = 0 \\ &\text{対立仮説} \quad H_1 : \mu \neq 0 \end{aligned}$$

を検定するため，次の棄却域を考える．

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \geq cy^2\}$$

すなわち，$(X, Y) \in R$ のとき帰無仮説 H_0 を棄却する．ただし c は正定数である．以下の設問に答えよ．

(1) 有意水準を α $(0 < \alpha < 1)$ とする．定数 c を定めよ．

(2) 確率 $P\Big((X, Y) \in R\Big)$ を μ の関数とみたとき，これを検出力関数という．(1) のとき，H_1 の下で次式が成立することを証明せよ．

$$P\Big((X, Y) \in R\Big) > \alpha$$

(3) $\Phi(x)$ を標準正規分布の累積分布関数とする．$c = 1, \sigma^2 = 1$ のとき次式を証明せよ．

$$P\Big((X, Y) \in R\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2$$

$\boxed{10}$ 正の実数 θ と実数 a の関数 $L(\theta, a)$ を以下で定義する．

$$L(\theta, a) = \begin{cases} \frac{(\theta-a)^2}{a}, & a > 0, \\ +\infty, & a \leq 0 \end{cases}$$

ある確率密度関数 $\pi(\theta)$ は $\displaystyle\int_0^\infty \theta^2 \pi(\theta) d\theta < \infty$ を満たすと仮定する．以下の設問に答えよ．

(1) $L(\theta, a)$ の θ に関する期待値

$$R(a) = \int_0^\infty L(\theta, a)\pi(\theta)d\theta$$

を考える．$R(a)$ は

$$a_\pi = \left\{ \int_0^\infty \theta^2 \pi(\theta) d\theta \right\}^{1/2}$$

で最小になることを示せ．

(2) 確率変数 X は平均 θ のポアソン分布に従い，確率関数 $p(x;\theta) = \dfrac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ をもつ．このとき θ の任意の推定量 $\delta(X)$ について

$$R(\delta) = \int_0^\infty E[L(\theta, \delta(X))]\pi(\theta)d\theta$$

と定義する．ただし，$E[\cdot]$ は X に関する期待値で，

$$E[L(\theta, \delta(X))] = \sum_{x=0}^\infty L(\theta, \delta(x))p(x;\theta)$$

である．このとき，$R(\delta)$ は以下のように書けることを示せ．

$$R(\delta) = \sum_{x=0}^\infty p(x) \left\{ \int_0^\infty L(\theta, \delta(x))\pi(\theta; x)d\theta \right\}$$

ここで，$p(x)$ は $x = 0, 1, 2, \ldots$ に値をもつ確率関数，$\pi(\theta; x)$ は θ と x の非負関数で，各 x において $\displaystyle\int_0^\infty \pi(\theta; x)\, d\theta = 1$ を満たす．

(3) (2) において次の推定量

$$\delta_\pi(x) = \left\{ \int_0^\infty \theta^2 \pi(\theta; x) d\theta \right\}^{1/2},\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

が $R(\delta)$ を最小にすることを示せ．

(4) (3) において確率密度関数が

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\theta^{\alpha-1}e^{-\theta/\beta}, \quad \theta > 0$$

で与えられるとき，$\pi(\theta; x)$ および $\delta_\pi(x)$ を求めよ．ただし，α, β は正の実定数で，$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du$ はガンマ関数である．