数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ a を実数とし，(x_1, x_2, x_3, x_4) についての連立一次方程式

$$\text{(E):} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-3 \\ -a+1 \\ a-2 \\ -2a+5 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) (E) が解を持つように a の値を定めよ．

(2) (E) が解を持つとき，その解の中で $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ が最小となるものを求めよ．

$\boxed{2}$ 関数 F を

$$F = F(t, x, y, z) = e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}$$

とおく．ただし，$t > 0$, x, y, $z \in \mathbb{R}$ とする．

(1) 以下の等式を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{1}{2}, x, 0, 0\right) \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

(2) 関数 G を

$$G = G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

とおく．関数 G を求めよ．

(3) 作用素 Δ を $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ とし，関数 H を

$$H = H(t, x, y, z) = \frac{\Delta F(t, x, y, z)}{G(t)}$$

とおく．ただし，$G(t)$ は (2) で定めた関数とする．このとき，$\displaystyle\int_1^{\infty} H(t, 1, 2, 3) \mathrm{d}t$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 正則関数 $f(x+iy)$ の実部が $x^2 - y^2 - 3y - 2$ であるとする．ここで $i = \sqrt{-1}$ である．

(1) $f(x+iy)$ の虚部を求めよ．

(2) $f(0) = -2$ のとき，$\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z}{f(z)} \mathrm{d}z$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 自然数 n をパラメータとする $\mathbb{R}$ 上の関数 $\phi_n(x)$ を

$$\phi_n(x) = \frac{n}{n^2x^2+1}$$

と定める．また $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された有界かつ連続な関数とする．

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) \mathrm{d}x$ の値を求めよ．

(2) 任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} f(x)\phi_n(x) \mathrm{d}x = 0$$

であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi_n(x) \mathrm{d}x$ の値を求めよ．

$\boxed{5}$ 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$ に従う母集団からの大きさ n の無作為標本を $X_1, \ldots, X_n$ とし, その標本平均, 不偏分散をそれぞれ $\bar{X}, U^2$ とおく. ただし, $n \geq 2$, $U \geq 0$ とする. 必要ならば, 自由度 $m\,(\geq 1)$ のカイ 2 乗分布 χ^2_m の確率密度関数

$$g_m(x) = \frac{1}{2^{m/2}\,\Gamma(m/2)}\,x^{m/2-1}e^{-x/2}, \quad x > 0$$

を使ってもよい. ここで, $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}\mathrm{d}u$ $(\alpha > 0)$ をガンマ関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) U^2 の分散を求めよ.

(2) U の確率密度関数を求めよ.

(3) U の期待値を求めよ.

(4) U の期待値が σ 以下であることを示せ.

$\boxed{6}$ 確率変数 X はラプラス分布に従い, 次の確率密度関数

$$f(x|\theta) = \frac{1}{2}\exp(-|x-\theta|), \quad -\infty < x < \infty$$

をもつとする. ただし θ は実数パラメータとする. また, b, c は正の定数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 事象

$$\{\theta - c \leq X \leq \theta + b\}$$

の確率を求めよ.

(2) θ の信頼区間 $S(X) = [X-b, X+c]$ を考える. 信頼水準を $1-\alpha$ (ただし $0 < \alpha < 1$) とするとき, 信頼区間の長さ $d = b + c$ を最小にする b と c を求めよ.

数理科学 II

以下の 9 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 複素正方行列 X に対して, 無限級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} X^j$$

は絶対収束することが知られており, この無限級数を $\exp(X)$ と表すことにする.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $A = T\Omega_0^2 T^{-1}$ となる直交行列 T と対角行列 Ω_0 を求めよ. ただし Ω_0 は

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2$$

の形のものとする.

(2) $\Omega = T\Omega_0 T^{-1}$ と定める. 複素数 z に対し, $\exp(z\Omega) = TD(z)T^{-1}$ を満たす行列 $D(z)$ を求めよ.

(3) 行列

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \exp(z\Omega)$$

を Ω, $\exp(z\Omega)$ を用いて表せ. ただし行列の微分は, 各成分を微分して得られる行列である.

(4) 複素 2 次元ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{x}(t) = \exp(it\Omega)\mathbf{a} + \exp(-it\Omega)\mathbf{b}$ とおく. ここで $i = \sqrt{-1}$ である. $\mathbf{x}(t)$ が微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}(t) = -A\mathbf{x}(t)$$

を満たすことを示し, さらに

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるように, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を定めよ.

$\boxed{2}$ 集合 $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続関数 $\}$ 上に 2 種類の距離

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x,$$
$$d_{\max}(f,g) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)|$$

を定義する. 以下を示せ.

(1) A が距離空間 (X, d_1) の開集合であるならば, 距離空間 $(X, d_{\max})$ の開集合でもある.

(2) $B = \{f \in X \mid f(0) > 0\}$ は距離空間 (X, d_1) の開集合ではないが, 距離空間 $(X, d_{\max})$ の開集合である.

(3) X 上の恒等写像は, 距離空間 $(X, d_{\max})$ から距離空間 (X, d_1) への連続写像であるが, 距離空間 (X, d_1) から 距離空間 $(X, d_{\max})$ への連続写像ではない.

$\boxed{3}$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし, $f : X \to (0, \infty)$ を可測関数とする. $\mu(X) < \infty$ のとき, 以下の (L1), (L2) を示せ.

$$\text{(L1)}: \quad \lim_{y \to \infty} y \int_{f(x) > y} \frac{1}{f(x)} \mu(\mathrm{d}x) = 0$$
$$\text{(L2)}: \quad \lim_{y \downarrow 0} y \int_{f(x) > y} \frac{1}{f(x)} \mu(\mathrm{d}x) = 0$$

$\boxed{4}$ 実数値確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ は独立に同一分布に従うとし, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ の分布関数を

$$F(x) = P(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

とおく. $k \in \mathbb{R}$ に対して以下の (M1), (M2) を示せ.

$$\text{(M1)}: \quad E[\max\{X_1, k\}] = k + \int_k^\infty (1 - F(x))\mathrm{d}x$$

$$\text{(M2)}: \quad E[\max\{X_1, \ldots, X_n, k\}] = k + \int_k^\infty (1 - F(x)^n)\mathrm{d}x$$

$\boxed{5}$ $f(t)$ は正の値をとる C^1 関数とする. $y(t)$ は次の初期値問題

$$\text{(P)}: \quad \begin{cases} y'(t) = -\dfrac{1}{t}y(t) + \dfrac{f(t)}{t}y(t)^2 - \dfrac{f'(t)}{f(t)^2}, \quad t > t_0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

の解とする. ただし $t_0 > 0$, $y_0 > \dfrac{1}{f(t_0)}$ とする.

(1) $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ は Riccati の方程式

$$z'(t) = -\frac{1}{t}z(t) + \frac{f(t)}{t}z(t)^2 - \frac{f'(t)}{f(t)^2}$$

の解であることを利用して, (P) の解 $y(t)$ を求めよ.

(2) $k > 1$ に対し, $f(t) = \dfrac{1}{t(\log t)^k}$ とし, $t_0 = e^2$ とする. このとき, ある有限の値 $T > t_0$ が存在して $\displaystyle\lim_{t \uparrow T} y(t) = \infty$ となるような, 初期値 y_0 の範囲を求めよ.

$\boxed{6}$ 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ $(n \geq 1)$ は独立に正規分布 $N(\mu, 1)$ $(\mu \in \mathbb{R})$ に従う．ただし X_i $(i = 1, \ldots, n)$ の値は直接観測されず，各 X_i が 0 以上であるか，0 より小さいかだけが観測されるとする．以下では

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y, \quad -\infty < x < \infty$$

とし, その逆関数 $\Phi^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ は存在して連続であることを用いてよい．以下の設問に答えよ．

(1) パラメータ μ の最尤推定量 $\hat{\mu}_n$ を求めよ．

(2) $n \to \infty$ としたとき $\hat{\mu}_n \xrightarrow{p} \mu$ となることを示せ．ただし，$\xrightarrow{p}$ は確率収束を表す.

$\boxed{7}$ 非負の整数値をとる独立な二つの確率変数を $X,\ Y$ とする．$Z = X + Y$ とおき，$P(Z = n) > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を仮定する．次の二つの条件を考える．

(I) ある $\lambda_a > 0,\ \lambda_b > 0$ が存在して

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda_a} \lambda_a^x}{x!}, \quad P(Y = y) = \frac{e^{-\lambda_b} \lambda_b^y}{y!}, \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots$$

である.

(II) ある p $(0 < p < 1)$ が存在して，任意の非負整数 n に対して, $Z = n$ が与えられた下での X の条件付き分布は

$$P(X = x | Z = n) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n - x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$$

で定まる．

以下の設問に答えよ.

(1) (I) と (II) は同値であることを示せ．

(2) 二つの地域 A, B における一年間の交通事故死者数はそれぞれ 63 と 81 であった．これらの地域間で交通事故死者数の期待値に違いがあるかどうか，有意水準を 0.05 として検定せよ．ただし，A, B における一年間の交通事故死者数は独立にポアソン分布に従うものとする．

$\boxed{8}$ 確率変数 X, Y は独立にそれぞれ次の確率密度関数をもつ指数分布に従うとする.

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad (x > 0), \quad g(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} \quad (y > 0)$$

ここで, $\theta > 0$ である. このとき, X, Y を用いて θ を推定することを考える. 以下の設問に答えよ.

(1) θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ を求めよ.

(2) θ の不偏推定量の一つは c を正の定数として, $\hat{\theta}_U = c\,\hat{\theta}_{ML}$ のようにかける. c と $\hat{\theta}_U$ を求めよ. なお, $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} \mathrm{d}u$ $(\alpha > 0)$ をガンマ関数とし, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ を用いてよい.

(3) θ の任意の不偏推定量 $\delta(X, Y)$ について

$$R(\theta; \delta) = E[(\delta(X, Y) - \theta)^2]$$

と定義する. このとき, 以下の条件を満たす不偏推定量 $\delta(X, Y)$ を一つ与えよ.

$$R(\theta; \hat{\theta}_U) > R(\theta; \delta), \qquad \forall \theta > 0$$

$\boxed{9}$ 以下の線型回帰モデルを考える.

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i = \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad n \geq 1, \quad p \geq 1,$$
$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T,\ \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^T,\ X = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)^T,\ \boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)^T$$

ただし，$\boldsymbol{x}_i^T$ は $\boldsymbol{x}_i$ の転置とし, X は $\mathrm{rank}(X) = p$ を満たす (定数) 行列とし，$E[\boldsymbol{\epsilon}] = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{Var}[\boldsymbol{\epsilon}] = \sigma^2 I_n$ ($\sigma^2 > 0$, I_n は n 次の単位行列) とする. また, A は $p \times n$ の (定数) 行列とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 目的関数 $L(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}\|^2$ を最小にする $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}$ を求めよ. ただし $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$ とする. また，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}$ の期待値ベクトル $E\big[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}\big]$ と分散共分散行列 $\mathrm{Var}\big[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}\big]$ を求めよ.

(2) 線型推定量 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = A\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{\beta}$ の不偏推定量となるための A についての必要十分条件を求めよ.

(3) $\boldsymbol{\beta}$ の任意の線型不偏推定量 $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = A\boldsymbol{y}$ に対して,

$$\mathrm{Var}\big[\widetilde{\boldsymbol{\beta}}\big] \geq \mathrm{Var}\big[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{LS}}\big]$$

が成り立つことを示せ. ここで，実対称行列 B, C に対して，$B \geq C$ は $B - C$ が非負定値行列であることを意味する.