数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ 関数 $f(s)$ を

$$f(s) = \frac{1}{1+e^{-s}} \quad (-\infty < s < \infty)$$

とおく．正の実数 α と $\mathbb{R}^2$ の領域

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le (2x+3y)^2,\, 0 \le 2x+3y \le 1\}$$

に対して

$$I_\alpha = \iint_D f\left(2\alpha x + 3\alpha y\right) dxdy$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) 変数変換

$$X = 2x+3y, \quad Y = y$$

のヤコビアン $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}$ を求めよ．

(2) Y を非負の実数とする．積分

$$\int_{\sqrt{Y}}^{1} \frac{dX}{1+e^{-\alpha X}}$$

を計算し，その値を α, Y を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ a を実数とする．行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -a-2 & -3a-3 & -a-1 \\ a+1 & 3a+2 & a+1 \\ -a-1 & -3a-3 & -a-2 \end{pmatrix}$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) A が正則でないための必要十分条件を a の値を用いて述べよ．

(2) A が正則でないとき，$B = P^{-1}AP$ を満たす対角行列 B と正則行列 P の組を 1 つ求めよ．

(3) n を自然数とする．A が正則でないとき，A^n を求めよ．

$\boxed{3}$ $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$ とする. 複素平面上の領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < \rho\}$ において正則な関数 $f(z)$ を $z = a$ のまわりでローラン展開するとは, $f(z)$ を D において

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad a_n \in \mathbb{C}$$

という形に書き表すことをいう. 以下の設問に答えよ.

(1) 関数 $g(z) = \sin \dfrac{1}{z}$ を $z = 0$ のまわりでローラン展開せよ.

(2) 関数 $h(z) = \dfrac{\sin \frac{1}{z}}{1 - z^2}$ を $z = 0$ のまわりでローラン展開せよ.

(3) 円 $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \dfrac{1}{2} \right\}$ を反時計回りに一周する閉曲線を C とおく. (2) で定めた $h(z)$ に対して, 積分 $\displaystyle\int_C h(z) dz$ の値を求めよ.

$\boxed{4}$ α, β, γ を実数とする. 実数値関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \beta\dfrac{dy}{dx} - 2\beta y = 0 \ (0 < x < \infty), \\ \lim\limits_{x \downarrow 0} y(x) = 4, \ \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{dy}{dx}(x) = \alpha, \ \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{d^2y}{dx^2}(x) = \gamma \end{cases}$$

を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) $\alpha = 8$, $\beta = -9$, $\gamma = 18$ のとき, 解 $y(x)$ を求めよ.

(2) $\alpha = -6$, $\beta = -4$, $\gamma = 8$ のとき, 解 $y(x)$ を求めよ.

(3) $\beta = 1$ のとき, 解 $y(x)$ を求めよ.

$\boxed{5}$ n は正の整数, μ は実数とする. 観測 $X_1, \ldots, X_n$ は正規分布 $N(\mu, 1)$ に従い独立とする. $\theta = \mu^3$ とする. 観測 $X_1, \ldots, X_n$ を用いたパラメータ θ の最尤推定量を S とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 最尤推定量 S を求めよ.

(2) $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする. a を実数とする. このとき, $T = S - \dfrac{a}{n^2}U$ が θ の不偏推定量となる a を求めよ.

(3) T は (2) で導出した θ の不偏推定量とする. このとき, 任意の θ について

$$E\left[(T-\theta)^2\right] < E\left[(S-\theta)^2\right]$$

が成り立つことを示せ.

$\boxed{6}$ n は正の整数, θ は実数とする. 確率変数列 $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ は独立で, 各 X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ は区間 $\left[\theta - \frac{1}{2},\ \theta + \frac{1}{2}\right]$ 上の一様分布に従うとする. 以下の設問に答えよ.

(1) 観測 $X_1, \ldots, X_n$ を用いて, 推定量 $\widehat{\theta}_n$ を

$$\widehat{\theta}_n = \max_{i=1,\ldots,n} X_i - \frac{1}{2}$$

とおく. このとき $\widehat{\theta}_n$ がパラメータ θ の最尤推定量の一つであることを示せ.

(2) 確率変数 $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,n} X_i$ の従う確率分布の確率密度関数を求めよ.

(3) $\widehat{\theta}_n$ は (1) で示した θ の最尤推定量とする. 確率変数列 $\{n(\widehat{\theta}_n - \theta)\}_{n=1}^{\infty}$ が確率有界であることを示せ. ここで実数値確率変数列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が確率有界であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在し

$$\sup_{n \geq 1} P\left(|Y_n| > K\right) < \epsilon$$

が成立することである.

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ (1) $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ は任意の実数 λ に対して常に

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 P(x,y), \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 Q(x,y)$$

を満たしているとする．このとき

$$M(x,y) = \frac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$$

とおくと

$$\frac{\partial}{\partial y}\{M(x,y)P(x,y)\} = \frac{\partial}{\partial x}\{M(x,y)Q(x,y)\}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 微分方程式

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

を解け.

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^3)(1+x^n)}dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ f_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ は $\mathbb{R}$ 上の非負値関数で, ルベーグ可測かつ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx < \infty$$

を満たすものとする. $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ とおく. 以下の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx < \infty$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| g(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| dx = 0$ を示せ.

$\boxed{4}$ X を有界な実数列の全体とする. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|, \qquad \boldsymbol{x} = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X, \quad \boldsymbol{y} = \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$$

と定める. 以下の設問に答えよ. ただし, 実数に関する性質は証明なしに用いてもよい.

(1) d が X 上の距離であることを示せ.

(2) 距離空間 (X, d) は完備であることを示せ.

$\boxed{5}$ $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ を満たす測度空間とする．正の値をとる X 上の可測関数の列 $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が

$$\mu\left(\left\{x \in X \middle| \lim_{n\to\infty} \xi_n(x) = 0\right\}\right) = 1$$

を満たすとする．以下の設問に答えよ．

(1) ある自然数の列 $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が存在して, 任意の自然数 m に対して $k_m < k_{m+1}$ および

$$\mu\left(\left\{x \in X \middle| \sup_{n\geq k_m} \xi_n(x) < \frac{1}{2^m}\right\}\right) > 1 - \frac{1}{2^m}$$

を満たすことを示せ.

(2) 自然数 m に対して k_m を (1) で定めたものとする．自然数 m に対して集合 A_m を

$$A_m = \left\{x \in X \middle| \sup_{n\geq k_m} \xi_n(x) < \frac{1}{2^m}\right\}$$

とする．このとき

$$\mu\left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=r}^{\infty} A_m\right) = 1$$

となることを示せ.

(3) 自然数 m に対して k_m, A_m を, それぞれ (1), (2) で定めたものとする．また, 集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

とする．関数 $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ を

$$f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m k_{m+1}} \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m})}(y) + \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \infty)}(y)$$

と定める．このとき

$$x \in \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=r}^{\infty} A_m$$

ならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\xi_n(x)) < \infty$$

となることを示せ.

$\boxed{6}$ $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立な確率変数列である．各 n に対して X_n は m_n 個の実数からなる集合 $\mathcal{S}_n = \{x_{n1}, \ldots, x_{nm_n}\}(\subset \mathbb{R})$ に値をとり

$$P\left(X_n = x_{nj}\right) = p_{nj} > 0 \quad (j = 1, \ldots, m_n), \quad \sum_{j=1}^{m_n} p_{nj} = 1$$

を満たしている．$\mu_n = E[X_n]$ とし, 数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\begin{aligned}
&u_n = E\left[\max\{X_1, \ldots, X_n\}\right], \\
&v_1 = \mu_1, \quad v_n = E\left[\max\{X_n, v_{n-1}\}\right] \quad (n \geq 2), \\
&w_n = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}
\end{aligned}$$

と定める．以下の設問に答えよ.

(1) すべての n に対して $v_n \geq w_n$ が成立することを示せ.

(2) $n \geq 2$, $x \in \mathcal{S}_n$ に対して

$$E\left[\max\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\} \;\middle|\; X_n = x\right] = E\left[\max\{X_1, \ldots, X_{n-1}, x\}\right]$$

が成立することを示せ．ただし, $E\left[\max\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\} \;\middle|\; X_n = x\right]$ は, 事象 $\{X_n = x\}$ を与えた下での $\max\{X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n\}$ の条件付き期待値とする.

(3) $n \geq 2$ に対して $u_n \geq E\left[\max\{X_n, u_{n-1}\}\right]$ が成立することを示せ.

(4) すべての n に対して $u_n \geq v_n$ が成立することを示せ.

$\boxed{7}$ n は 2 以上の整数とする． μ と γ は実数で, $\mu \neq 0$, $\gamma > 0$ とする． 実数値確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 μ, 分散 $\dfrac{\gamma}{\mu^2}$ の正規分布に従うとする．また, $\Theta = \left\{(\mu, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu \neq 0,\ \gamma > 0\right\}$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) (μ, γ) の最尤推定量 $(\widehat{\mu}_n, \widehat{\gamma}_n)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた最尤推定量 $(\widehat{\mu}_n, \widehat{\gamma}_n)$ の一致性, すなわち, 任意の $(\mu, \gamma) \in \Theta$, 任意の $\epsilon > 0$ で

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\widehat{\mu}_n - \mu| + |\widehat{\gamma}_n - \gamma| > \epsilon\right) = 0$$

を示せ.

$\boxed{8}$ n は 2 以上の整数とする．p は実数で, $0 < p < 1$ とする．確率変数列 $X_1, \dots, X_n$ は独立で, 各 X_i $(i = 1, \dots, n)$ はベルヌーイ分布 $B(p)$ に従うとする．すなわち,

$$P(X_i = k) = \begin{cases} p & (k = 1) \\ 1 - p & (k = 0) \end{cases}$$

とする．また, $q = 1 - p$,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2, \quad T_n = \overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)$$

とする．以下の設問に答えよ．

(1) $E\left[S_n^2\right]$ と $E\left[T_n\right]$ を求めよ．

(2) $S_n^2 - pq = (1 - \overline{X}_n - p)(\overline{X}_n - p)$ が成り立つことを示せ．

(3) $p \neq \dfrac{1}{2}$ とする．$n \to \infty$ のとき, $\sqrt{n}(S_n^2 - pq)$ の漸近分布を求めよ．

(4) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．$n \to \infty$ のとき, $-4n\left(S_n^2 - \dfrac{1}{4}\right)$ の漸近分布を求めよ．

$\boxed{9}$ n は正の整数, μ は正の実数とする．確率変数列 $X_1, \dots, X_n$ は独立で, 各 X_i $(i = 1, \dots, n)$ は確率密度関数

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \dfrac{\mu}{\sqrt{2\pi x^3}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \dfrac{\mu}{\sqrt{x}}\right)^2\right\} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする．$\alpha = \dfrac{1}{\mu} + \dfrac{1}{\mu^2}$ とおく．以下の設問に答えよ．

(1) α の最尤推定量 $\widehat{\alpha}$ を求めよ．ただし, 調和平均

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}\right)^{-1}$$

を用いてよい．

(2) t を $t < \mu^2/2$ を満たす任意の実数とするとき

$$E\left[\exp\left(\frac{t}{X_1}\right)\right] = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - 2t}} \exp\left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 2t}\right)$$

が成り立つことを示せ．

(3) (1) で求めた最尤推定量 $\widehat{\alpha}$ が α の不偏推定量であることを示せ．

$\boxed{10}$ n は正の整数, μ は正の実数とする. 確率変数列 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 μ の指数分布に従うとする. ただし, 平均 μ の指数分布は次の確率密度関数

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ. 以下の設問に答えよ.

(1) 確率変数 $\dfrac{2X_1}{\mu}$ は自由度 2 のカイ二乗分布 χ_2^2 に従う. このことを用いて

$$W = \frac{2}{\mu} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

の従う分布を求めよ. ただし, 自由度 n のカイ二乗分布 χ_n^2 の確率密度関数は

$$g(x; n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

であり, $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (\alpha > 0)$$

である.

(2) 有意水準を α $(0 < \alpha < 1)$ とし, μ_0 を適当な正の実数とするとき, 帰無仮説 $H_0 : \mu = \mu_0$, 対立仮説 $H_1 : \mu < \mu_0$ の仮説検定を行いたい. 検定統計量を

$$W_0 = \frac{2}{\mu_0} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とするとき棄却域 R を W_0 を用いて適切に定めよ.

(3) 製品 A が故障するまでの時間を解析したい. 実際に 10 個の製品の故障するまでの時間を計測したところ, 10 個の平均寿命は 400 時間だった. この製品のパッケージには寿命が 500 時間と記載されていた. この製品 A の寿命は平均 μ 時間の指数分布に従うとして, 帰無仮説 $H_0 : \mu = 500$, 対立仮説 $H_1 : \mu < 500$ の仮説検定を行え. ただし, 有意水準は 5% とする. また, 仮説検定の結果から, 製品 A の寿命は 500 時間を下回ると考えてよいか結論を述べよ. なお, カイ二乗分布の分位点は以下を用いよ.

自由度 m	9	10	18	20
$\chi_m^2(0.05)$	16.92	18.31	28.87	31.41
$\chi_m^2(0.95)$	3.33	3.94	9.39	10.85

ただし, $\chi_m^2(\alpha)$ は自由度 m のカイ二乗分布の上側 100α% 点を表す.