数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし，$\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで，計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ．

$\boxed{1}$ n を非負整数とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 2x} x^n\, dxdy$ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^5$ を実成分の 5 次元縦ベクトル全体のなすベクトル空間

$$\mathbb{R}^5 = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \middle|\, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

とする．5 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $U = \{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5\}$ の基底を 1 つ求めよ．

(2) $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を 1 つ求めよ．ここで，$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^5$ の零ベクトル

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を表す．

(3) U, V をそれぞれ (1), (2) で定めたものとする．$\mathbb{R}^5$ の部分空間 $U \cap V$ の基底を 1 つ求めよ．

(4) $\mathbb{R}^5$ の部分空間 $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底を 1 つ求めよ．

$\boxed{3}$ $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ とする．D 上の関数 $f(z)$ を

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{3}{z^3} + \cdots + (-1)^n \frac{n}{z^n} + \cdots$$

と定める．また, D を含む集合 U を $U = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -1\}$ と定める．以下の設問に答えよ．

(1) D において $(1+z)^2 f(z)$ は z の多項式で表されることを示せ.

(2) $f(z)$ は U 上のある関数 $F(z)$ に解析接続されることを示せ．すなわち, 次の性質 (a), (b) を満たす関数 $F(z)$ が存在することを示せ.

(a) $F(z)$ は U 上で定義され, U 上で正則である.

(b) D 上で $F(z) = f(z)$ が成立する.

(3) $F(z)$ は (2) で求めた関数とする．$F(z)$ の原点を中心とするべき級数展開を求めよ.

$\boxed{4}$ 実数値関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = e^{-2x}(\sin x + 2\cos x) \qquad (0 < x < \infty), \\ \lim\limits_{x \downarrow 0} y(x) = -1, \qquad \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{dy}{dx}(x) = 2 \end{cases}$$

を考える．以下の設問に答えよ.

(1) α を実数とする．積分 $\displaystyle\int_0^x e^{\alpha t} \cos t \; dt$ および $\displaystyle\int_0^x e^{\alpha t} \sin t \; dt$ を求めよ.

(2) 解 $y(x)$ を求めよ.

$\boxed{5}$ n は正の整数，a は実数で未知パラメータとする．以下の線形回帰モデル

$$y_i = ax_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

を考える．ここで，$x_1, \dots, x_n$ は実定数，実数値確率変数 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ は独立で，各 ϵ_i $(i = 1, \dots, n)$ は標準正規分布に従うとする．また

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2, \qquad S_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^2, \qquad S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

とし，$S_x^2 > 0$ とする．$\displaystyle\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2$ を最小にする a を $\widehat{a}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\widehat{a}$ を求めよ．さらに，等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(y_i - \widehat{a}x_i\big)^2 = S_y^2 - \frac{(S_{xy})^2}{S_x^2}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 = S_x^2\left(a - \widehat{a}\right)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \big(y_i - \widehat{a}x_i\big)^2$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\sqrt{nS_x^2}\,(\widehat{a} - a)$ は標準正規分布に従うことを示せ．

(4) $n = 10$, $S_x^2 = 0.3$, $S_{xy} = 0.9$ とする．このとき，有意水準を 5% として，帰無仮説 $H_0 : a = 2$, 対立仮説 $H_1 : a > 2$ の仮説検定を行い結論を述べよ．なお，標準正規分布の上側 5%点は 1.645, 上側 2.5%点は 1.960 とする．

$\boxed{6}$ n は 3 以上の整数とする．θ は正の実数で未知パラメータとする．実数値確率変数 $X_1, \dots, X_n$ は独立で，各 X_i $(i = 1, \dots, n)$ は確率密度関数

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{x^2} & (x \geq \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする．ここで, x は実数である．$X_1, \dots, X_n$ を用いた θ の最尤推定量を $\widehat{\theta}_n$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\widehat{\theta}_n$ を求めよ．

(2) x を実数とする．$\widehat{\theta}_n$ の確率分布の分布関数 $P(\widehat{\theta}_n \leq x)$ を求めよ．

(3) $\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であるか否か．理由を付して答えよ．

(4) $\widehat{\theta}_n$ は θ の一致推定量であるか否か．理由を付して答えよ．

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで，それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ α, β を実数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\,dx$ が収束するための α, β に関する必要十分条件を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty x^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\log(1+x)\,dx$ が収束するための α, β に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{2}$ 以下の設問に答えよ.

(1) α を非負の実数とする. 関数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ を

$$\varphi_n(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\alpha t}}{(x^3+t^3)^n}\,dt \quad (x>0)$$

と定義する. このとき

$$\frac{d\varphi_n}{dx}(x) = -e^{-\alpha x}2^{-n}x^{-3n} - 3x^2 n\varphi_{n+1}(x) \quad (x>0,\ n=1,2,3,\dots)$$

が成立することを示せ.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x^3+1)^3}\,dx$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 以下の設問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は, ある定数 $M > 0$ に対して

$$|f_{n+1}(x)| \leq M|f_n(x)| \qquad (x \in \mathbb{R},\, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を満たすものとする. 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n(x)$ は収束することを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $n = 1, 2, 3, \ldots$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$g_n(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \displaystyle\int_0^x t^n dt & (n \text{ は偶数}), \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \displaystyle\int_0^x t^n dt & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

と定める. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ.

$\boxed{4}$ 自然数 n に対し, $\mathcal{M}_n$ は n 次実正方行列全体を表す. $O, I \in \mathcal{M}_n$ は零行列と単位行列をそれぞれ表す. $A \in \mathcal{M}_n$ に対して

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x|=1} |Ax|$$

と定義する. ただし,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{に対して} \quad |y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$$

と定めている. さらに, 関数 $d : \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$ を

$$d(A, B) = \|A - B\| \quad (A, B \in \mathcal{M}_n)$$

と定める. 以下の設問に答えよ.

(1) d は $\mathcal{M}_n$ 上の距離であることを示せ.

(2) $A, B \in \mathcal{M}_n$ に対して $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ が成立することを示せ.

(3) $A \in \mathcal{M}_n$ は $\|A\| < 1$ を満たすとする. k を自然数とする.

$$B_k = I + \sum_{j=1}^{k} A^j$$

と定める. このとき以下の主張 (a), (b) が成立することを示せ. ただし, 距離空間 $(\mathcal{M}_n, d)$ の完備性は証明なしに用いてもよい.

(a) 距離空間 $(\mathcal{M}_n, d)$ において $\displaystyle\lim_{k\to\infty} A^k = O$ が成立する.

(b) 距離空間 $(\mathcal{M}_n, d)$ において $\displaystyle\lim_{k\to\infty} B_k$ が存在し, この極限が $I - A$ の逆行列となる.

$\boxed{5}$ X を $\mathbb{R}$ の開区間 $(-1,1)$ とし，X 上の距離 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = |x-y| \quad (x, y \in X)$$

と定める．以下の設問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}$ の完備性は証明なしに用いてもよい．

(1) 自然数 n に対して，$a_n = 1 - 2^{-n}$ と定める．このとき距離空間 (X,d) において, 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列であることおよび収束列でないことを示せ．

(2) 関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \quad (x \in X)$$

と定める．また, 関数 $d_f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)| \quad (x, y \in X)$$

と定める．このとき d_f は X 上の距離であることを示せ．さらに距離空間 (X, d_f) は完備であることを示せ．

(3) d_f は (2) で定めた距離とする．実数 $r > 0$ と $x \in X$ に対して

$$B_f(x;r) = \{y \in X \mid d_f(x,y) < r\}$$

と定める．このとき $B_f(x;r)$ は距離空間 (X,d) における開集合であることを示せ．

$\boxed{6}$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数値確率変数の列とする. 次の条件 $(\star)$ が成立するとき, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率有界であるという.

$(\star)$ 任意の正の実数 ε に対し, ある正の実数 M が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$P(|X_n| > M) < \varepsilon$$

が成立する.

このとき以下の主張 (a), (b), (c) が成立することを示せ.

(a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[|X_n|] < \infty$ ならば $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率有界である.

(b) $n \to \infty$ としたとき X_n がある実数値確率変数 X に確率収束するならば, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率有界である.

(c) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $P(X_n = n) = p_n$ かつ $P(X_n = 0) = 1 - p_n$ であると仮定する. ただし, $0 \le p_n \le 1$ とする. このとき, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が確率有界であることと $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ となることは同値である.

$\boxed{7}$ n は正の整数とする．p は実数で，$0 < p < \frac{1}{3}$ とする．確率変数 (X, Y, Z) はパラメータ $(n;\ p, 2p, 1-3p)$ をもつ三項分布に従うとする．なお，パラメータ $(n;\ q, r, s)$ をもつ三項分布の確率関数は，$q+r+s=1$ を満たす非負の実数 q, r, s と $x+y+z=n$ を満たす非負の整数 x, y, z に対して，

$$P\Big((X,Y,Z)=(x,y,z)\Big)=\frac{n!}{x!y!z!}q^x r^y s^z$$

で与えられる．また，$T = X + Y$ とおく．以下の設問に答えよ．

(1) $t = 0, \ldots, n$ とし，$k = 0, \ldots, t$ とする．$T = t$ が与えられた下での条件付き確率 $P(X = k, Y = t-k \mid T = t)$ を求めよ．

(2) $t = 1, \ldots, n$ とする．任意の $p \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ に対して

$$E\left[\left(\frac{X}{n}-p\right)^2 \,\middle|\, T=t\right] > \left(\frac{t}{3n}-p\right)^2$$

が成り立つことを示せ．ここで，$E\left[\left(\frac{X}{n}-p\right)^2 \,\middle|\, T=t\right]$ は $T=t$ が与えられた下での $\left(\frac{X}{n}-p\right)^2$ の条件付き期待値である．

(3) 任意の $p \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ に対して

$$E\left[\left(\frac{X}{n}-p\right)^2\right] > E\left[\left(\frac{T}{3n}-p\right)^2\right]$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{8}$ n を正の整数とし，μ は実数とする．実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は独立で，各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 μ, 分散 1 の正規分布に従うとする．$X_1, \ldots, X_n$ の確率分布を P_μ と表し，$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする．$\sqrt{n}\,\overline{X}_n > 1.96$ の条件の下での $\overline{X}_n$ の条件付き分布の分布関数を F_μ と表す．すなわち，実数 x に対して，

$$F_\mu(x) = P_\mu(\ \overline{X}_n \le x \mid \sqrt{n}\,\overline{X}_n > 1.96\ )$$

と定義する．また，F_μ をもつ条件付き分布の確率密度関数を f_μ と表す．標準正規分布の分布関数を Φ とする．以下の設問に答えよ．

(1) F_μ を Φ を用いて表せ.

(2) $x_2 > x_1 > \dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$ を満たす任意の実数 x_1, x_2 と $\mu_2 > \mu_1$ を満たす任意の実数 μ_1, μ_2 に対して

$$\frac{f_{\mu_2}(x_2)}{f_{\mu_1}(x_2)} > \frac{f_{\mu_2}(x_1)}{f_{\mu_1}(x_1)}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $x > \dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$ を満たす任意の実数 x と $\mu_2 > \mu_1$ を満たす任意の実数 μ_1, μ_2 に対して，

$$\{1 - F_{\mu_2}(x)\}F_{\mu_1}(x) > \{1 - F_{\mu_1}(x)\}F_{\mu_2}(x)$$

が成り立つことを示せ.

(4) α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とする．以下の (C1)，(C2) を同時に満たす実数 c_α を Φ とその逆関数 Φ^{-1} を用いて表せ.

(C1) :　任意の$\mu \le 0$ に対して，$P_\mu(\ \sqrt{n}\,\overline{X}_n \ge c_\alpha \mid \sqrt{n}\,\overline{X}_n > 1.96\ ) \le \alpha$

(C2) :　任意の$\mu > 0$ に対して，$P_\mu(\ \sqrt{n}\,\overline{X}_n \ge c_\alpha \mid \sqrt{n}\,\overline{X}_n > 1.96\ ) > \alpha$

$\boxed{9}$ n は正の整数とする．λ は正の実数で未知パラメータとする．実数値確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ は独立で，各 X_i $(i=1,\ldots,n)$ は確率関数

$$P(X_i=x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\quad (x=0,1,\ldots)$$

をもつ確率分布に従うとする．また，X_1 の分散を $V[X_1]$ とし，X_1 の標準偏差を $\beta=\sqrt{V[X_1]}$ とする．$X_1,\ldots,X_n$ を用いた β の最尤推定量を $\widehat{\beta}_n$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $V[X_1]$ を求めよ．さらに，β を λ を用いて表せ．

(2) $\widehat{\beta}_n$ を求めよ．

(3) $\widehat{\beta}_n$ は β の不偏推定量か否か．理由を付して答えよ．

$\boxed{10}$ n を正の整数とし，θ を実数とする．実数値確率変数 $X_1,\ldots,X_n$ は独立で，各 X_i $(i=1,\ldots,n)$ は平均 θ, 分散 1 の正規分布に従うとする．また，$\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ とする．さらに，$|\alpha|<1$ なる実数 α に対し関数 $\widetilde{\theta}_n\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を

$$\widetilde{\theta}_n(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}\overline{x}_n & \left(|\overline{x}_n|>n^{-\frac{1}{4}}\right)\\ \alpha\overline{x}_n & \left(|\overline{x}_n|\le n^{-\frac{1}{4}}\right)\end{cases},\qquad \overline{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

とおく．以下の設問に答えよ．

(1) 正の実数 x に対して，

$$P\left(\sqrt{n}(\overline{X}_n-\theta)\ge x\right)\le e^{-\frac{x^2}{2}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\theta=0$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\left\{\sqrt{n}\left(\widetilde{\theta}_n\left(X_1,\ldots,X_n\right)-\theta\right)\right\}^2\right]=\alpha^2$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\theta\ne 0$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\left\{\sqrt{n}\left(\widetilde{\theta}_n\left(X_1,\ldots,X_n\right)-\theta\right)\right\}^2\right]=1$$

が成り立つことを示せ．