数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし, $\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで, 計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 以下の設問に答えよ.

(1) $t = \sin\theta$ と変数変換することにより, 不定積分 $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\cos\theta}$ を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \,|\, 0 < y \leq x \leq 1\}$ のとき, 広義積分

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$$

の値を求めよ.

$\boxed{2}$ a を実数とし, 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -2a+5 & -2a+4 & 2a-3 \\ 2a-3 & 2a-2 & -2a+3 \\ -a+2 & -a+2 & a \end{pmatrix}$$

とおく. 以下の設問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) A が対角化可能でない a の値をすべて求めよ.

(3) n を 3 以上の自然数とする. A が対角化可能でないとき, A^n を E, A, A^2 の一次結合として表せ. ただし, E は 3 次単位行列である.

$\boxed{3}$ z は複素数とする. $P_1 = \{-3\}$ とし, $\mathbb{C} \setminus P_1$ 上の関数 $g_1(z)$ を

$$g_1(z) = -\frac{2}{z+3} \quad (z \notin P_1)$$

と定める. また, $n \geq 2$ に対して, 集合 P_n と $\mathbb{C} \setminus P_n$ 上の関数 $g_n(z)$ を帰納的に

$$P_n = \{z \in \mathbb{C} \setminus P_{n-1} \mid g_{n-1}(z) = -3\}$$

および

$$g_n(z) = \begin{cases} g_1(g_{n-1}(z)) & (z \notin P_{n-1} \text{ かつ } z \notin P_n), \\ 0 & (z \in P_{n-1} \text{ かつ } z \notin P_n) \end{cases}$$

によって定める. 以下の設問に答えよ.

(1) P_2 および $g_2(z)$ を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定めるとき, すべての $n \geq 1$ に対して P_n と $g_n(z)$ は

$$P_n = \left\{ -\frac{d_n}{c_n} \right\}, \qquad g_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \quad (z \notin P_n)$$

と表せることを証明せよ.

(3) 円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$ を反時計回りに一周する閉曲線を C とおく. 極限

$$\lim_{n \to \infty} 2^n \int_C g_n(z) dz$$

を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の設問に答えよ.

(1) α, x を正の実数とする. このとき, 積分 $\displaystyle\int_0^x e^{-t} \sin \alpha t \, dt$ を求めよ.

(2) 区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ に対する積分方程式

$$f(x) = e^{-x} \sin x + \int_0^{\pi/2} f(t) \, dt \qquad (0 \leq x < \infty)$$

を考える. この積分方程式をみたす関数 $f(x)$ を 1 つ求めよ.

(3) 区間 $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 $y(x)$ に対する積分方程式

$$y(x) = \cos^3 x + \int_0^x y(t) \, dt \qquad (0 \leq x < \infty)$$

を考える. この積分方程式をみたす関数 $y(x)$ を 1 つ求めよ.

$\boxed{5}$ α と λ を正の実数, n を $n\alpha > 2$ を満たす整数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ の確率分布の確率密度関数は

$$f(x; \lambda, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

によって与えられるとする. ここで, $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ である. α を既知とし, λ を

$$\widehat{\lambda} = \frac{n\alpha - 1}{\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i}$$

によって推定する. なお, 確率変数 $S = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$ の確率分布の確率密度関数が $f(s; \lambda, n\alpha)$ $(s > 0)$ となることを用いてもよい.

以下の設問に答えよ.

(1) $\widehat{\lambda}$ は λ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(2) 分散 $V\left[\,\widehat{\lambda}\,\right]$ と $\left\{ nE\left[\left(\dfrac{\partial \log f(X_1; \lambda, \alpha)}{\partial \lambda} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$ の大小を比較せよ.

$\boxed{6}$ n を正の整数, θ を正の実数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1} & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする. また, $X_1, \ldots, X_n$ を用いた θ の最尤推定量を $\widehat{\theta}_n$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\widehat{\theta}_n$ を求めよ.

(2) $\widehat{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(3) $E\left[(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 \right]$ を求めよ.

数理科学 II

以下の 9 問の中から 4 問を選んで, それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 以下の設問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 f, g をそれぞれ

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & (|x| \leq 1), \\ 0 & (|x| > 1), \end{cases}$$
$$g(x) = e^{-|x|} \ (x \in \mathbb{R})$$

により定める. 自然数 n に対し, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x-n)g(x)dx$ とおく. このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ が成り立つことを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 F, G はそれぞれ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|dx < \infty$ および $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} G(x) = 0$ をみたすものとし, 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ をみたすものとする. 自然数 n に対し, $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x - a_n)G(x)dx$ とおく.

(a) 自然数 n に対して J_n は有限値であることを示せ.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = 0$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{2}$ X と Y は空でない集合とする. $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 0 & (a = b), \\ 1 & (a \neq b) \end{cases}$$

と定義する. また, $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ を Y 上の距離関数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) δ は X 上の距離関数であることを示せ.

(2) $a \in X$ とする. 一点集合 $\{a\}$ は距離空間 (X, δ) 上の開集合であることを示せ.

(3) 任意の写像 $f : X \to Y$ は距離空間 (X, δ) から距離空間 (Y, d) への連続写像であることを示せ.

(4) 距離空間 (Y, d) がコンパクトであると仮定する. また, $g : Y \to X$ を距離空間 (Y, d) から距離空間 (X, δ) への連続写像とする. このとき $g(Y)$ は有限集合であることを示せ.

$\boxed{3}$ $0 < \alpha < 1$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $i = \sqrt{-1}$ とする. $\epsilon > 0$ に対して, 複素平面上の半直線 $C_+(\epsilon)$, $C_-(\epsilon)$ をそれぞれ

$$C_+(\epsilon) = \{x + \epsilon i \mid x \geq 0\}, \quad C_-(\epsilon) = \{x - \epsilon i \mid x \geq 0\}$$

と定める. 対数関数 $\log z$ の主値 $\mathrm{Log}\, z$ を

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i \arg z, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi$$

ととる. ここで $\arg z$ は z の偏角とする. 複素関数 $f(z) = \dfrac{z^{\alpha-1}}{z+1}$ に対して, $I_+(\epsilon)$, $I_-(\epsilon)$ をそれぞれ

$$I_+(\epsilon) = \int_{C_+(\epsilon)} f(z)dz, \quad I_-(\epsilon) = \int_{C_-(\epsilon)} f(z)dz$$

と定める. ここで $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ \mathrm{Log}\, z}$ であり, 積分路の向きは実部が増加する方向とする. ルベーグの優収束定理を用いて

$$\lim_{\epsilon \to 0} I_+(\epsilon) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx, \quad \lim_{\epsilon \to 0} I_-(\epsilon) = e^{2\pi(\alpha-1)i} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$$

が成立することを示せ.

(2) 留数定理を用いて積分

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}dx$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$ $r > 0$ とする. $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 B_r を, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$B_r(x,y) = \begin{cases} 1 & (|x-y| \leq r), \\ 0 & (|x-y| > r) \end{cases}$$

と定める. f を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |f(x)|dx < \infty$ をみたすものとする.

以下の設問に答えよ.

(1) α を実数とする. このとき

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid B_r(x,y) > \alpha\}$$

はユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ における閉集合であることを示せ.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$A_r[f](x) = \frac{1}{2r} \int_{-\infty}^\infty B_r(x,y) f(y) dy$$

と定める. このとき, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $|A_r[f](x)| < \infty$ となること, および $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |A_r[f](x)|\, dx < \infty$ となることを示せ.

(3) $A_r[f]$ を (2) で定めたものとする. 各 $x \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{r \to 0} A_r[f](x) = f(x)$ を示せ.

$\boxed{5}$ 距離空間 (X, d) を

$$X = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ は連続関数} \right\},$$
$$d(f,g) = \max_{0 \le x \le 1} |f(x) - g(x)| \quad (f, g \in X)$$

で定義する. 写像 $F : X \to X$ を

$$F(f)(x) = \int_0^x \{ s f(s) + 1 \} \, ds \quad (f \in X, x \in [0,1])$$

で定める. また, $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を $f_0(x) = 0$ $(x \in [0,1])$ を用いて

$$f_n = F(f_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

で定める. さらに

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!} \quad (x \in [0,1])$$

とする. ただし, $(2k-1)!! = (2k-1)(2k-3) \cdots 3 \cdot 1$ である. 以下の設問に答えよ.

(1) $f, g \in X$ に対して $d(F(f), F(g)) \le \dfrac{1}{2} d(f,g)$ が成立することを示せ.

(2) 数学的帰納法を用いて $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!!}$ $(n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1])$ を示せ.

(3) 各 $x \in [0,1]$ に対して無限級数 $h(x)$ は絶対収束することを示せ. さらに

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x) - h(x)| \le \frac{1}{2^{n-1} n!} \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成立することを示せ.

(4) $h \in X$ と $h = F(h)$ を示せ.

(5) $h(x) = \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right) \displaystyle\int_0^x \exp\left(-\dfrac{s^2}{2}\right) ds$ $(x \in [0,1])$ を示せ.

$\boxed{6}$ n を正の整数とし, k を $1 \leq k \leq n$ なる整数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 同一の確率分布に従うとする. X_1 の確率分布の分布関数 $F(x)$ は微分可能であるとし, その確率密度関数を $f(x) = F'(x)$ とする. さらに, $X_1, \ldots, X_n$ の順序統計量を $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ とする. $X_{(k)}$ の確率分布の確率密度関数を $f_{X_{(k)}}(x)$ とする. 関数 φ_k を

$$\varphi_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-F(x))^{n-k}F(x)^{k-1}f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) f の連続点 x で $f_{X_{(n)}}(x) = \varphi_n(x)$ となることを証明せよ.

(2) $k = 1, \ldots, n$ に対し, f の連続点 x で $f_{X_{(k)}}(x) = \varphi_k(x)$ となることを証明せよ.

(3) f は点 $a \in \mathbb{R}$ を除いて連続であると仮定し,

$$\begin{cases} f(x) = 0 & (x \leq a) \\ f(x) > 0 & (x > a) \end{cases}$$

が成り立つと仮定する. 開区間 (a, ∞) 上で F は逆関数を持ち, これを $F^{-1}\colon (0,1) \to (a, \infty)$ とする. このとき,

$$E[X_{(k)}] = \int_0^1 F^{-1}(y)\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-y)^{n-k}y^{k-1}\,dy$$

が成り立つことを示せ.

(4) f は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 1) \\ \dfrac{1}{x^2} & (x > 1) \end{cases}$$

で与えられるとする. $p \in (0,1)$ とするとき,

$$\lim_{n\to\infty} E[X_{(\lfloor np \rfloor)}]$$

を求めよ. ここで, 実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表すとする. また, 2 つの正の整数 l, m に対して

$$\int_0^1 (1-y)^{l-1}y^{m-1}dy = \frac{(l-1)!(m-1)!}{(l+m-1)!}$$

が成り立つことを用いてもよい.

$\boxed{7}$ n を正の整数, λ を正の実数とする. 実数値確率変数 X は確率密度関数

$$p(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする. また, 実数 y に対して, 事象 $\{X \leq 1\}$ が与えられた下での X の条件付き分布の分布関数 $F(y)$ を以下で定義する.

$$F(y) = \begin{cases} P(X \leq y \mid X \leq 1) & (y \leq 1) \\ 1 & (y > 1) \end{cases}$$

n 個の実数値確率変数 $Y_1, \ldots, Y_n$ は互いに独立で, 各 Y_i $(i = 1, \ldots, n)$ は分布関数 $F(y)$ をもつ確率分布に従うとする. また,

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{e^{\lambda} - 1}, \quad \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \overline{Z}_n = \begin{cases} \overline{Y}_n & \left(\overline{Y}_n < \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{1}{4} & \left(\overline{Y}_n \geq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $G(\lambda)$ が λ に関して狭義単調減少であることを示せ. また, $G(\lambda)$ のグラフの概形を描け.

(2) $E[Y_1]$ を求めよ.

(3) $\widehat{\lambda}_n$ を $G(\lambda) = \overline{Z}_n$ を満たす λ とする. $n \to \infty$ のとき, $\widehat{\lambda}_n$ は λ の一致推定量であることを示せ.

$\boxed{8}$ n を正の整数とする．n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数 $f(x)$ をもつ確率分布に従うとする．ただし, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続であるとする．$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して,

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

と定める．また, $h > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\widehat{f}_n(x; h) = \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^{n} I_{(x-h,\, x+h]}(X_i)$$

と定める．以下の設問に答えよ．

(1) $h > 0$ と $x \in \mathbb{R}$ に対して, 期待値 $E\left[\widehat{f}_n(x; h)\right]$ と分散 $V\left[\widehat{f}_n(x; h)\right]$ を求めよ．

(2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ を満たす正数列とする．このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\widehat{f}_n(x; h_n)\right]$$

を求めよ．

(3) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ と $\lim_{n\to\infty} nh_n = \infty$ を満たす正数列とする．このとき, $x \in \mathbb{R}$ に対して, $n \to \infty$ のとき, $\widehat{f}_n(x; h_n)$ が $f(x)$ の一致推定量となることを示せ．

$\boxed{9}$ t を実数とする．実数値確率変数 X の積率母関数 $M(t) = E[e^{tX}]$ は $\mathbb{R}$ 上で存在すると仮定する．X のキュムラント母関数は $\psi(t) = \log M(t)$ で定義され, 正の整数 m に対して,

$$\kappa_m = \frac{d^m \psi(0)}{dt^m} = \left.\frac{d^m \psi(t)}{dt^m}\right|_{t=0}$$

を X の m 次キュムラントという．

p を正の整数とする．p 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_p$ は互いに独立で, 積率母関数 $M_j(t) = E[e^{tX_j}]$ $(j = 1, \ldots, p)$ が $\mathbb{R}$ 上で存在すると仮定する．$j = 1, \ldots, p$ に対して, $\psi_j(t)$ を X_j のキュムラント母関数, $\kappa_m^{(j)}$ を X_j の m 次キュムラント, a_j を実定数とする．確率変数 $\sum_{j=1}^{p} a_j X_j$ の m 次キュムラントを $\kappa_m(a_1, \ldots, a_p)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\sum_{j=1}^{p} a_j X_j$ のキュムラント母関数を a_j と X_j のキュムラント母関数 $(j = 1, \ldots, p)$ を用いて表せ．

(2) $\kappa_m(a_1, \ldots, a_p)$ を m, a_j, $\kappa_m^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, p)$ を用いて表せ．

(3) $\kappa_2(a_1, \ldots, a_p)$ を a_j と分散 $V[X_j]$ $(j = 1, \ldots, p)$ を用いて表せ．

(4) $\sum_{j=1}^{p} a_j^2 = 1$ とする．次の不等式を証明せよ．

$$\min\{0, \kappa_4^{(1)}, \ldots, \kappa_4^{(p)}\} \le \kappa_4(a_1, \ldots, a_p) \le \max\{0, \kappa_4^{(1)}, \ldots, \kappa_4^{(p)}\}$$