数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし, $\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで, 計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0 \right\}$$

とおく. 以下の設問に答えよ.

(1) Ω 上の各点 (x, y, z) は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (2 + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

と表すことができる. ただし, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ とする. ヤコビアン $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dxdydz$ を求めよ.

$\boxed{2}$ 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) A の固有値をすべて求めよ.

(2) $Q^T AQ$ が対角行列となるような直交行列 Q を 1 つ求めよ. ただし, Q^T は Q の転置行列を表す.

(3) 実数 x, y, z が $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たすように動くとき, 関数

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 7z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$$

が最大値をとる (x, y, z), および最小値をとる (x, y, z) を, それぞれすべて求めよ.

$\boxed{3}$ n を自然数とし, 複素数 $z \neq 0$ に対して

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^n$$

と定める. 以下の設問に答えよ.

(1) 原点 $z = 0$ における $f(z)$ の留数を求めよ.

(2) 円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を反時計回りに一周する閉曲線を C とするとき, 積分 $\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ を求めよ.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta\,d\theta$ を求めよ.

$\boxed{4}$ $f(x)$ を実数上連続微分可能な関数とし, 実数値関数 $y(x)$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} f\dfrac{dy}{dx} + y\dfrac{df}{dx} = f & \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \displaystyle\lim_{x \downarrow 0} y(x) = 1 & \end{cases}$$

を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) $f(x) = 3\cos x$ のとき, 解 $y(x)$ を 1 つ求めよ.

(2) $f(x) = \cos^3 x$ のとき, 解 $y(x)$ を 1 つ求めよ.

$\boxed{5}$ n は正の整数とする．d は 2 以上の整数とする．μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ は実数で, σ^2 は正の実数とする．実数値確率変数列 $X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,d}, \ldots, X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,d}$ は互いに独立で, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d$ に対して, $X_{i,j}$ は平均 μ_i, 分散 σ^2 の正規分布に従うとする．$X_{1,1}, X_{1,2}, \ldots, X_{1,d}, \ldots, X_{n,1}, X_{n,2}, \ldots, X_{n,d}$ を用いた $(\mu_1, \ldots, \mu_n, \sigma^2)$ の最尤推定量を $(\widehat{\mu}_1, \ldots, \widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $(\widehat{\mu}_1, \ldots, \widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$ を求め, 実際に $(\widehat{\mu}_1, \ldots, \widehat{\mu}_n, \widehat{\sigma}_n^2)$ が尤度関数を最大にしていることを確認せよ．

(2) $\widehat{\sigma}_n^2$ は σ^2 の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ．

(3) $n \to \infty$ のとき, $\widehat{\sigma}_n^2$ は σ^2 の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ．

$\boxed{6}$ p を 2 以上の整数, μ を実数, σ_e^2 を正の実数とする．n_i $(i = 1, \ldots, p)$ を 2 以上の整数とする．a_i $(i = 1, \ldots, p)$ は実数で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i a_i = 0$ を満たすとする．e_{ij} $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, n_i)$ は互いに独立で同一の正規分布 $N(0, \sigma_e^2)$ に従う実数値確率変数とする．$n_\bullet = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i$ とおく．Y_{ij} $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, n_i)$ を次式で定義する．

$$Y_{ij} = \mu + a_i + e_{ij}$$

さらに

$$\overline{Y}_{i\bullet} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \quad \overline{Y}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{n_\bullet}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij},$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2, \quad S_e = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{i\bullet})^2,$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p} n_i a_i^2, \quad T = \frac{S_A}{p-1} - \frac{S_e}{n_\bullet - p}$$

とおく．なお，$\mu, a_1, \ldots, a_p, \sigma_e^2$ は Y_{ij} $(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, n_i)$ の確率分布を定める未知パラメータである．以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \overline{Y}_{\bullet\bullet})^2 = S_A + S_e$$

(2) 期待値 $E[T]$ を求めよ．

(3) 次ページの表 1 のデータは本問で定義された Y_{ij} の実現値 y_{ij} である．要因 A には 4 水準 (A1, A2, A3, A4) あり $(p = 4)$，これらの水準間で母平均を比較したい．自由度 4 および 12 の t 分布の上側 2.5%点をそれぞれ $t_4(0.025) = 2.78$ および $t_{12}(0.025) = 2.18$ とする．自由度 $(3, 16)$ の F 分布の上側 5%点を $F_{16}^3(0.05) = 3.24$ とする．なお，以下の検定では検定の多重性 (検定を複数回行うことで，第 1 種の過誤が事前に設定した有意水準を超えてしまうこと) を考慮しなくてよい．以下の小問に答えよ．

(3a) 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする．帰無仮説 $H_0 : a_1 = a_4$ に対して対立仮説 $H_1 : a_1 \neq a_4$ として，A1 と A4 のデータを用いて t 検定せよ．

(3b) 有意水準を $\alpha = 0.05$ とする．帰無仮説 $H_0 : a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ に対して対立仮説 $H_1 : H_0$ ではない，として，A1, A2, A3, A4 のすべてのデータを用いて F 検定せよ．なお，$\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_{\bullet\bullet})^2 = 21.5$ を使ってもよい．

表 1: データ

	要因 A			
	A1	A2	A3	A4
データ	1.5	2.0	3.0	3.5
	2.5	3.0	4.0	4.5
	3.5	4.0	5.0	5.5
		2.0	3.0	
		3.0	4.0	
		4.0	5.0	
		3.0	4.0	
n_i	3	7	7	3
平均 ($\overline{y}_{i\bullet}$)	2.5	3.0	4.0	4.5
平方和	2.0	4.0	4.0	2.0

平方和 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \overline{y}_{i\bullet})^2$

数理科学 II

以下の 9 問の中から 4 問を選んで, それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ n 次実正方行列 A に対して

$$
\begin{aligned}
&Ap_j = \lambda_j p_j \quad (j = 1, \ldots, n), \\
&\lambda_1 \neq 0, \quad \left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| < 1 \quad (j = 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

を満たす $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ と, 線形独立な $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ が存在するとする. $\alpha_1 > 0$, $\{\alpha_j\}_{j=2}^n \subset \mathbb{R}$ を任意に選び,

$$
x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j p_j, \quad x_k = \frac{A^{2k} x_0}{\|A^{2k} x_0\|} \quad (k \in \mathbb{N})
$$

と定める. ただし, ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ の標準内積を (x, y) と表し, $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ と定めている. このとき

$$
\lim_{k \to \infty} x_k = \frac{p_1}{\|p_1\|}, \quad \lim_{k \to \infty} (Ax_k, x_k) = \lambda_1
$$

が成立することを示せ.

$\boxed{2}$ $\alpha \in (0, 1)$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 等式

$$
\int_0^\infty \left(x^{\alpha - 1} - (x + 1)^{\alpha - 1} \right) \mathrm{d}x = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_0^\infty \left(x^{\alpha - 1} - (x + 1)^{\alpha - 1} \right) e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x
$$

を示せ.

(2) $\lambda > 0$ に対して, 等式

$$
\int_0^\infty (x + 1)^{\alpha - 1} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = e^\lambda \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha} - e^\lambda \int_0^1 x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x
$$

を示せ. ただし

$$
\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha - 1} e^{-x} \, \mathrm{d}x
$$

とする.

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \left(x^{\alpha - 1} - (x + 1)^{\alpha - 1} \right) \mathrm{d}x$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $X = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2 < \infty \right\}$ とする．任意の $f \in X$ に対して $\|f\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ と定める．以下の設問に答えよ．

(1) $f, g \in X$ が $\|f\| = 1$ かつ $\|g\| = 1$ を満たしているとする．このとき, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$ が収束すること, および

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n) \right| \leq 1$$

が成り立つことを示せ.

(2) 任意の $f, g \in X$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$ が収束すること, および

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n) \right| \leq \|f\| \, \|g\|$$

が成り立つことを示せ.

(3) $f, g \in X$ ならば $f + g \in X$ となることを示せ．ただし, $f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ は $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ と定義されるものとする.

(4) X の点列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ と $f \in X$ が以下の (a), (b) を満たすとする.

(a) $\lim_{m\to\infty} \|f_m\| = \|f\|$.

(b) 任意の $g \in X$ に対して, $\lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(f_m(n) - f(n)\bigr) g(n) \right| = 0$ が成り立つ.

このとき, $\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\| = 0$ を示せ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f が

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq |z_1 - z_2| \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{R})$$

を満たすとする. このとき, 非負実数 t を変数とする関数 x_n からなる関数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$\begin{cases} x_1(t) = a, \\ x_{n+1}(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(x_n(s))ds \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases} \qquad (t \geq 0)$$

により定める. ただし $a \in \mathbb{R}$ は定数である. 正の実数 T に対し, $C([0,T])$ により $[0,T]$ 上で連続な実数値関数全体からなる集合を表す. また $C([0,T])$ 上のノルムを

$$\|x\|_T = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$$

によって定める. 以下の設問に答えよ. なお必要なら $(C([0,T]), \|\cdot\|_T)$ がバナッハ空間であることを用いてよい.

(1) T を任意の正実数, n を任意の自然数とするとき

$$\|x_{n+1} - x_n\|_T \leq T^n |f(a)|$$

が成り立つことを示せ.

(2) a に依存しない正定数 T_0 と, $[0,T_0]$ 上で定義された連続関数 x が存在して, $n \to \infty$ のとき x_n は x に $[0,T_0]$ 上一様収束することを示せ.
さらに, $x(0) = a$ が成り立つこと, および任意の $t \in (0,T_0)$ に対し

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$$

が成り立つことを示せ.

(3) $T_m(a)$ を

$$T_m(a) = \sup\left\{ T > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in C([0,T]) \text{ が存在して, 任意の } t \in [0,T] \text{ に対して} \\ x(t) = a + \displaystyle\int_0^t f(x(s))ds \text{ を満たす} \end{array} \right\}$$

により定める. $T_m(a) = \infty$ であることを背理法を用いて示せ.

$\boxed{5}$ $f:(0,\infty)\to[0,\infty)$ をルベーグ測度に関して可積分な関数とする．各自然数 n に対して，関数 $f_n:(0,\infty)\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ を

$$f_n(x,y)=\frac{f(x)^n}{f(x)^n+(e^{x+y}-1)y^n}$$

と定義する．また，集合 $A,B,C\subset(0,\infty)\times(0,\infty)$ を

$$\begin{aligned}A&=\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)\,|\,y<f(x)\},\\ B&=\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)\,|\,y=f(x)\},\\ C&=\{(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)\,|\,y>f(x)\}\end{aligned}$$

と定める．このとき以下の設問に答えよ．

(1)

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x,y)=\begin{cases}1 & ((x,y)\in A),\\ e^{-(x+y)} & ((x,y)\in B),\\ 0 & ((x,y)\in C)\end{cases}$$

となることを示せ．

(2) 関数 $g:(0,\infty)\times(0,\infty)\to[0,\infty)$ を

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & ((x,y)\in A),\\ e^{-(x+y)} & ((x,y)\in B\cup C)\end{cases}$$

と定義する．このとき，すべての自然数 n およびすべての点 $(x,y)\in(0,\infty)\times(0,\infty)$ に対して

$$0\le f_n(x,y)\le g(x,y)$$

となることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty f_n(x,y)\,dxdy=\int_0^\infty f(x)\,dx$ となることを示せ．

$\boxed{6}$ n は 2 以上の整数, θ は実数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x;\theta) = \frac{1}{2}e^{-|x-\theta|} \quad (-\infty < x < \infty)$$

をもつ確率分布に従うとする. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を小さいものから大きさの順に並べかえたものを $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ で表す. すなわち $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ である. 次の設問に答えよ.

(1) n が偶数のとき, すべての実数 θ に対して,

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} \left|X_{(n-j+1)} - X_{(j)}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|X_{(i)} - \theta\right|$$

が成り立つことを示せ.

(2) n が奇数のとき, $X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ は θ の最尤推定量であることを示せ.

(3) $n = 3$ のとき, $X_{(2)}$ は θ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

$\boxed{7}$ $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．実数値確率変数 Y_1, Y_2 は独立で, 各 Y_j $(j = 1, 2)$ は平均 μ_j, 分散 1 の正規分布 $N(\mu_j, 1)$ に従うとする．このとき, $Y_1^2 + Y_2^2$ の確率分布を自由度 2, 非心度 $\mu_1^2 + \mu_2^2$ の非心カイ二乗分布という．$F(x; 2, \lambda^2)$ は自由度 2, 非心度 λ^2 の非心カイ二乗分布の累積分布関数とする．ただし, λ は非負の実数である．$\Phi(x)$ は標準正規分布の累積分布関数, $f_1(x)$ は自由度 1 のカイ二乗分布の確率密度関数とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\lambda \geq 0$ とする．任意の $x \geq 0$ に対して,

$$F(x; 2, \lambda^2) = \int_0^x \left\{ \Phi(\lambda + \sqrt{x - v}) - \Phi(\lambda - \sqrt{x - v}) \right\} f_1(v)\, dv$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$ とする．任意の $x \geq 0$ に対して,

$$\begin{aligned} &F(x; 2, \lambda_1^2) - F(x; 2, \lambda_2^2) \\ &= \int_0^x \int_{\lambda_1 - \sqrt{x-v}}^{\lambda_2 - \sqrt{x-v}} \left[1 - \exp\left\{ -2\sqrt{x - v} \left(u + \sqrt{x - v} \right) \right\} \right] g(u) f_1(v)\, du\, dv \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ここで, $g(u)$ は標準正規分布の確率密度関数である．

(3) $\lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$ とする．任意の $x \geq 0$ に対して,

$$F(x; 2, \lambda_2^2) \leq F(x; 2, \lambda_1^2)$$

が成り立つことを示せ．

(4) θ を正の実数とする．Ω を $\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とする半径 θ の閉円板とし, Ω^c をその補集合とする．Y_1 と Y_2 を用いて, 帰無仮説 $H_0 : (\mu_1, \mu_2) \in \Omega$, 対立仮説 $H_1 : (\mu_1, \mu_2) \in \Omega^c$ の仮説検定を考える．ただし, 有意水準 α を $0 < \alpha < 1$ とする．以下の条件を満たす関数 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \{0, 1\}$ を 1 つ構成せよ．

$$\begin{aligned} &\text{任意の } (\mu_1, \mu_2) \in \Omega \text{ に対して,}\quad E[\phi(Y_1, Y_2)] \leq \alpha, \\ &\text{任意の } (\mu_1, \mu_2) \in \Omega^c \text{ に対して,}\quad E[\phi(Y_1, Y_2)] \geq \alpha \end{aligned}$$

$\boxed{8}$ n は正の整数とする. μ は実数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}+1} \exp\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}+1} x - |x| \right) \quad (-\infty < x < \infty)$$

をもつ確率分布に従うとする. $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\overline{X}_n$ は μ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(2) $(\overline{X}_n)^2$ は μ^2 の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(3) $n \to \infty$ のとき, $(\overline{X}_n)^3$ は μ^3 の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

$\boxed{9}$ n を正の整数とする. z は実数で, $0 \leq z \leq 1$ とする. n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ はベルヌーイ分布 $\mathrm{Ber}(z)$ に従うとする. すなわち, $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$P(X_i = 1) = z, \quad P(X_i = 0) = 1 - z$$

とする. また, f を区間 $[0, 1]$ 上で定義された連続関数とし,

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 期待値 $E\big[f(Y_n)\big]$ を z に関する多項式で表せ.

(2) δ を正の実数とし,

$$U_n(\delta, z) = \begin{cases} 1 & (|Y_n - z| \geq \delta) \\ 0 & (|Y_n - z| < \delta) \end{cases}$$

とする. このとき, n と z と δ に依存しない定数 $M > 0$ が存在して,

$$E\Big[|f(Y_n) - f(z)|\, U_n(\delta, z)\Big] \leq \frac{M}{n\delta^2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 次式が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in[0,1]} \big| E\big[f(Y_n)\big] - f(z) \big| = 0$$