数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし, $\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで, 計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 連続関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が, ある正実数 C, ある自然数 n, およびある正実数 L に対して, 以下を満たすとする：

$$\text{(A)}\quad x \geq L \text{ を満たす任意の } x \text{ に対して } 0 < f(x) \leq Cx^n$$

以下の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy$ の値を, 極座標変換を用いて求めよ.

(2) ある正実数 D が存在して,

$$\text{(B)}\quad x \geq L \text{ を満たす任意の } x \text{ に対して } f(x)e^{-x^2} \leq De^{-\frac{1}{2}x^2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)e^{-x^2}dx$ が存在し, 有限の値であることを示せ.

$\boxed{2}$ 3 次実正方行列全体からなる集合を M_3 と表す．M_3 の元 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -6 & -8 & 6 \\ -6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

によって与える．また，任意の $B \in M_3$ に対し，M_3 の部分集合 X_B を

$$X_B = \{C \in M_3 \,|\, BC = CB\}$$

によって定める．このとき，X_B は行列の和と実数倍によってベクトル空間となる．以下の設問に答えよ．

(1) A の固有値をすべて求めよ．また，A が対角化可能であることを示せ．

(2) $P \in M_3$ を正則行列とし，$B \in X_A$ に対し，$f_P(B) = P^{-1}BP$ と定める．このとき $f_P(B) \in X_{P^{-1}AP}$ であること, および f_P が X_A から $X_{P^{-1}AP}$ への全単射な線型写像であることを示せ．

(3) X_A の次元を求めよ．

$\boxed{3}$ α を実数とし, 実数値関数 $x(t), y(t)$ についての連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -7x(t) + 6y(t) + \alpha\cos t & (t > 0), \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = -9x(t) + 8y(t) & (t > 0), \\ \displaystyle\lim_{t\downarrow 0} x(t) = 1, \\ \displaystyle\lim_{t\downarrow 0} y(t) = 2 \end{cases}$$

を考える. 以下の設問に答えよ.

(1) $\alpha = 0$ のとき, 解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

(2) $\alpha = 1$ のとき, 解 $x(t)$ および $y(t)$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 周期 2π の連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ の全体を X と表す. X 上のエルミート内積とノルムをそれぞれ

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad (f, g \in X)$$

と定義する. ただし $\overline{z}$ は $z \in \mathbb{C}$ の複素共役を表す. また, $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathbb{I} = \{k \in \mathbb{Z} \mid -N \leq k \leq N,\ k \neq 0\}$$

と定め, X の関数系 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{I}}$ を

$$e_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

で与える. ただし i は虚数単位とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\{e_k\}_{k\in\mathbb{I}}$ は正規直交系であることを示せ.

(2) $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{I})$ に対して, $h = \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{I}} \alpha_k e_k$ と定義する. このとき, $\|h\| \leq \|h'\|$ であることを示せ. また $\|h\| = \|h'\| \neq 0$ となるような $\alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{I})$ の例をあげよ. ここで h' は h の導関数を表す.

$\boxed{5}$ n は正の整数とする. θ は実数で, $0 \leq \theta \leq 1$ とする. n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ はベルヌーイ分布 $\mathrm{Ber}(\theta)$ に従うとする. すなわち, $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$P(X_i = 1) = \theta, \quad P(X_i = 0) = 1 - \theta$$

とする. また, a, b を非負の実数とし, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ として, 未知パラメータ θ を

$$\widehat{\theta}_n(a, b) = \frac{a + S_n}{a + b + n}$$

によって推定する問題を考える. 推定量 $\widehat{\theta}_n(a, b)$ の平均二乗誤差を

$$R_n(a, b \mid \theta) = E\left[\left\{\widehat{\theta}_n(a, b) - \theta\right\}^2\right]$$

とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $R_n(a, b \mid \theta)$ を求めよ.

(2) $R_n(a, b \mid \theta)$ が θ に依存しない定数となるような (a, b) を求めよ.

(3) (2) で求めた (a, b) を (a_*, b_*) とし, $R_n^* = R_n(a_*, b_* \mid \theta)$ とする. 以下が成り立つか否か, 理由を付して答えよ.

$$\max_{\theta \in [0,1]} R_n(0, 0 \mid \theta) \leq R_n^*$$

(4) a, b は定数とする. $n \to \infty$ のとき, $(\widehat{\theta}_n(a, b))^2$ は θ^2 の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

$\boxed{6}$ n は 2 以上の整数とする. θ は正の実数とし, c は実数とする. n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は閉区間 $[0, 2\theta]$ 上の一様分布に従うとする. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とする. また, $X_1, \ldots, X_n$ を用いた中央値 θ の最尤推定量を $\widehat{\theta}_n$ とし, $T_n = c\widehat{\theta}_n$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\widehat{\theta}_n$ を求めよ.

(2) T_n が θ の不偏推定量となる c を求めよ.

(3) (2) で求めた c に対して, T_n の分散を v_n とする. $\overline{X}_n$ の分散を w_n とする. このとき, $v_n < w_n$ が成り立つことを示せ.

(4) (2) で求めた c に対して, $\sqrt{T_n}$ は $\sqrt{\theta}$ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで, それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ $u(x,t)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 関数とする.

$$(x,t) = \left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{-\xi+\eta}{2}\right), \quad (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$$

と変数変換し,

$$U(\xi,\eta) = u(x,t)$$

とおく. 以下の設問に答えよ.

(1) $\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$ であることを示せ.

(2) U が $\dfrac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ をみたすとき, $\mathbb{R}$ 上の C^2 関数 F, G を用いて

$$U(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

と表すことができることを示せ.

(3) f と g は, それぞれ $\mathbb{R}$ 上の C^2, C^1 関数とする. u が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = f(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

をみたすとき, u を f と g を用いて表せ.

$\boxed{2}$ a を整数ではない複素数とする. $\epsilon \in \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ に対して, 複素平面 $\mathbb{C}$ の領域 Ω を

$$\Omega = \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r > 0,\ -\epsilon < \theta < 2\pi - \epsilon\}$$

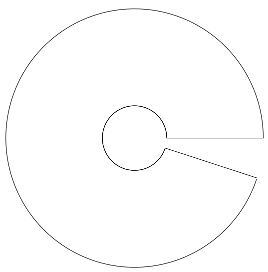
と定め, $z = re^{i\theta} \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} \ell(z) &= \log r + i\theta \quad (r > 0,\ -\epsilon < \theta < 2\pi - \epsilon), \\ z^{a-1} &= \exp\left((a-1)\ell(z)\right) \end{aligned}$$

と定める. ただし i は虚数単位とする. $r \in (0,1)$, $R \in (1,\infty)$ に対して, $\mathbb{C}$ 上の, 下図の形状の正の向きの単純閉曲線 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$,

$$\begin{aligned} C_1 &: z(t) = t \quad (r \leq t \leq R), \\ C_2 &: z(t) = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi - 2\epsilon), \\ C_3 &: z(t) = (R-t)e^{i(2\pi - 2\epsilon)} \quad (0 \leq t \leq R - r), \\ C_4 &: z(t) = re^{i(2\pi - 2\epsilon - t)} \quad (0 \leq t \leq 2\pi - 2\epsilon) \end{aligned}$$

を定める.



n を自然数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_C \frac{z^{a-1}}{(1+z)^n}\,dz$ を求めよ.

(2) 曲線 C_3 上の z に対して, 不等式

$$\frac{1}{|1+z|} \leq \frac{2}{2+|z|}$$

が成立することを示せ.

(3) 等式

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{C_3} \frac{z^{a-1}}{(1+z)^n}\,dz = -e^{2\pi a i} \int_r^R \frac{x^{a-1}}{(1+x)^n}\,dx$$

が成立することを示せ.

(4) a は整数でない実数で, $0 < a < n$ であるとき, 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^n}\,dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\phi(t) = e^{|t|} - 1$ で定義し, $[0,1]$ 上の連続関数の列 $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ を次で定義する.

$$f_n(x) = \begin{cases} \log n & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{(\log x)^2}{\log n} & \left(\dfrac{1}{n} < x \leq 1\right) \end{cases}$$

以下の設問に答えよ.

(1) $\alpha > 0$ とする. 2 以上の自然数 n と $x \in (0,1]$ に対して, 次の不等式を示せ.

$$\chi_n(x)\left(n^{\frac{1}{\alpha}} - 1\right) \leq \phi\left(\frac{f_n(x)}{\alpha}\right) \leq x^{-\frac{1}{\alpha}}$$

ただし, $x \in [0,1]$ に対して

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{1}{n} < x \leq 1\right) \end{cases}$$

とする.

(2) $0 < \alpha < 1$ に対して, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi\left(\frac{f_n(x)}{\alpha}\right) dx = \infty$$

(3) $\alpha > 1$ に対して, 次を示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi\left(\frac{f_n(x)}{\alpha}\right) dx = 0$$

(4) 次で定義された数列 $\{\Phi_n\}_{n=2}^{\infty}$ を考える.

$$\Phi_n = \inf\left\{\alpha > 0 \;\middle|\; \int_0^1 \phi\left(\frac{f_n(x)}{\alpha}\right) dx \leq 1\right\}$$

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Phi_n$ を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の設問に答えよ.

(1) U, V を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする. $\dim U + \dim V > 3$ ならば, $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ であることを示せ. ここで $\mathbf{0}$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルである.

(2) $k = 1, 2, 3$ に対し,

$$\mathcal{X}_k = \{U \subset \mathbb{R}^3 \mid U \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の } k \text{ 次元部分空間}\}$$

とする. 実数 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ に対し, 対角行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, $k = 1, 2, 3$ に対して,

$$\lambda_k = \min_{U \in \mathcal{X}_k} \left(\max_{x \in U, ||x||=1} (Ax, x) \right)$$

であることを示せ. ただし, $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^3$ の標準内積で, $||\cdot||$ はそれから定まるノルムである.

$\boxed{5}$ $R > 0$, $t > 0$ とし,

$$I_R(t) = \int_0^R e^{-tx} \sin x \, dx$$

とおく. 以下の設問に答えよ.

(1) 各 $R > 0$, $t > 0$ に対して, 定積分 $I_R(t)$ の値を求めよ.

(2) 各 $R > 0$ に対して, $\displaystyle\int_0^\infty |I_R(t)| \, dt < \infty$ であることを示せ.

(3) $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_0^\infty I_R(t) \, dt$ の値を求めよ.

(4) 関数 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $g(x, t) = xe^{-tx}$ と定義する. 各 $R > 0$ に対して,

$$\int_{[0,R] \times (0,\infty)} g \, d\mu < \infty$$

であることを示せ. ただし μ は $\mathbb{R}^2$ 上のルベーグ測度である.

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$ の値を求めよ.

$\boxed{6}$ 実数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ を満たすもの全体からなる集合を S と表す．2 つの関数 $f, g : S \to \mathbb{R}$ を，各 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ に対して，次のように定める．

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1, \qquad g(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

また，関数 $d : S \times S \to \mathbb{R}$ を，各 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ に対して，次のように定める．

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{n}$$

以下の設問に答えよ．

(1) d は S 上の距離であることを示せ．

(2) f は距離空間 (S, d) 上の連続関数であることを示せ．

(3) g は距離空間 (S, d) 上の連続関数ではないことを示せ．

(4) S の部分集合

$$T = \{\boldsymbol{x} \in S \mid g(\boldsymbol{x}) \leq 1\}$$

は距離空間 (S, d) の閉集合であることを示せ．

$\boxed{7}$ n は正の整数とする. α は実数で, $0 < \alpha < 1$ とする. μ は実数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 μ, 分散 1 の正規分布 $N(\mu, 1)$ に従うとする. 帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$, 対立仮説 $H_1 : \mu \neq 0$ の仮説検定を考える. 以下の 2 つの検定統計量 $T_{1,n}$, $T_{2,n}$ を考える.

$$T_{1,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_{2,n} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

そして, 以下の 2 つの検定 ϕ_1, ϕ_2 を考える.

- 検定 ϕ_1: $|T_{1,n}| \geq c_1$ ならば H_0 を棄却し, $|T_{1,n}| < c_1$ ならば H_0 を採択する検定
- 検定 ϕ_2: $T_{2,n} \geq c_{2,n}$ ならば H_0 を棄却し, $T_{2,n} < c_{2,n}$ ならば H_0 を採択する検定

ここで, c_1 は標準正規分布の上側 $50\alpha\%$ 点, $c_{2,n}$ は自由度 n のカイ二乗分布の上側 $100\alpha\%$ 点である. また, c_3 を標準正規分布の上側 $100\alpha\%$ 点とする. 標準正規分布の分布関数を Φ とすると, $\Phi(c_1) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, $\Phi(c_3) = 1 - \alpha$ となる. また, $c_{2,n}$ と c_3 には, 以下の関係が成立する.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c_{2,n} - n}{\sqrt{2n}} = c_3$$

以下の設問に答えよ.

(1) μ を 0 でない定数とする. $n \to \infty$ のとき, 検定 ϕ_1 の検出力が 1 に収束することを示せ.

(2) b を実定数とし, $b \neq 0$ とする. $\mu = \frac{b}{\sqrt{n}}$ とする. 検定 ϕ_1 の検出力を Φ, b, c_1 を用いて表せ.

(3) (2) において, 検定 ϕ_1 の検出力が α より大きくなることを示せ.

(4) b を実定数とし, $b \neq 0$ とする. $\mu = \frac{b}{\sqrt{n}}$ とする. $n \to \infty$ のとき, 検定 ϕ_2 の検出力の極限を求めよ.

$\boxed{8}$ n は 4 以上の整数とする．ρ は実数で, $|\rho| < 1$ とする．$\mathbb{R}^2$ 値確率変数 $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ は互いに独立で, 各 (X_i, Y_i) $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x, y) = A_\rho \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2 - 2\rho xy + y^2\right)\right\} \qquad (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$$

をもつ 2 次元正規分布に従うとする．ここで, A_ρ は ρ に依存する正の実数である．$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ とする．$\rho = 0$ のとき, 標本相関係数

$$R_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)(Y_i - \overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \overline{Y}_n\right)^2}}$$

は確率密度関数

$$f_{R_n}(r) = \begin{cases} \dfrac{2^{n-3}}{\pi(n-3)!}\left\{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\right\}^2 \left(1 - r^2\right)^{\frac{n-4}{2}} & (|r| < 1) \\ 0 & (|r| \geq 1) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従う．ここで，Γ はガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy \qquad (x > 0)$$

である．また, ガンマ関数は $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$ を満たす．さらに，正の整数 m に対して, 自由度 m の t 分布の確率密度関数は

$$g_m(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\sqrt{m\pi}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

で与えられる．以下の設問に答えよ．

(1) A_ρ を求めよ．

(2) 帰無仮説 $H_0 : \rho = 0$ を検定するための検定統計量を

$$T_n = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - R_n^2}} R_n$$

とする．H_0 のもとで，T_n が自由度 $n-2$ の t 分布に従うことを示せ．

(3) 標準正規分布の分布関数を Φ とし, 標準正規分布の上側 2.5% 点を c とする．実数値関数 z を

$$z(r) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \qquad (|r| < 1)$$

と定義する．このとき, 任意の実数 x に対して,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n-3}\{z(R_n) - z(\rho)\} \leq x\right) = \Phi(x)$$

が成り立つ．この結果に基づいて

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\rho \in [L_n, U_n]\right) = 0.95$$

を満たす ρ の 95%信頼区間 $[L_n, U_n]$ を R_n, c, n を用いて構成せよ．

$\boxed{9}$ n は正の整数とし, θ は正の実数とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} \exp\left(-\dfrac{x}{\theta}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を 0 に収束する正の実数列とする. 丸め幅 a_n で切り捨て処理された X_i を $X_i^{(a_n)}$ とする. すなわち

$$X_i^{(a_n)} = a_n \left\lfloor \frac{X_i}{a_n} \right\rfloor$$

とする. ここで実数 x に対して $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表すとする. また $X_1, \ldots, X_n$ を用いた θ の最尤推定量を $S_n = \widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ とする. $\widehat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ において, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ を $X_i^{(a_n)}$ に置き換えた θ の推定量を

$$T_n = \widehat{\theta}_n\left(X_1^{(a_n)}, \ldots, X_n^{(a_n)}\right)$$

とする. 以下の設問に答えよ.

(1) S_n は θ の一致推定量であることを示せ.

(2)

$$E\left[X_1^{(a_n)}\right] = \frac{a_n \exp\left(-\dfrac{a_n}{\theta}\right)}{1 - \exp\left(-\dfrac{a_n}{\theta}\right)}$$

であることを示せ. ただし, 整数 k に対して $k a_n \leq x < (k+1) a_n$ のとき $\left\lfloor \dfrac{x}{a_n} \right\rfloor = k$ となることを用いてもよい.

(3) T_n は θ の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

$\boxed{10}$ 以下の設問に答えよ.

(1) 実数値確率変数 X は確率密度関数をもつ確率分布に従い, $E[|X|] < \infty$ とする. また, m を X の確率分布の中央値とする. このとき, 任意の実数 a に対して,

$$E[|X - a|] \geq E[|X - m|]$$

が成り立つことを示せ.

(2) θ は実数で, $\theta > 1$ とする. 実数値確率変数 Y は確率密度関数

$$f(y; \theta) = \frac{\theta^2 - 1}{2\theta} \exp\left(-\theta|y| + y\right) \qquad (-\infty < y < \infty)$$

をもつ確率分布に従うとする. また a は実数とする. このとき, $E[|Y - a|]$ が最小となる a を θ を用いて表せ.