数理科学 I

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ を必答とし, $\boxed{3}$ から $\boxed{6}$ までの中から 2 問を選んで, 計 4 問をそれぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 以下の設問に答えよ.

(1) $|x| < 1$ のとき, $\log(1+x)$ のマクローリン展開を求めよ.

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt$ を求めよ.

(3) $x > 0$ のとき

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\,dt$$

とおく. $\displaystyle\int_0^1 \frac{F(x)}{x}\,dx$ の値を求めよ. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$ であることを用いてよい.

(4) $D = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ とおく. 2 重積分

$$\iint_D \left| \frac{x-y}{(x+y)(x^2+y^2)} \right| dxdy$$

は発散することを示せ.

$\boxed{2}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ とし, 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta-1 & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 1 \\ 1-\beta & \beta-1 & \alpha-\beta+1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を与える. 以下の設問に答えよ.

(1) $P^{-1}AP$ を求めよ.

(2) A の固有値をすべて求めよ.

(3) A が対角化可能であるための必要十分条件を α, β の値を用いて述べよ.

(4) N^n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ を求めよ.

(5) $\beta = 0$ とする. A^n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ を求めよ.

$\boxed{3}$ $a > 0$, $a \neq 1$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f : \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{ai\} \cup \{i/a\}) \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2(z - ai)(az - i)}$$

とする．ただし，i は虚数単位とする．それぞれ $0, ai, i/a$ における f の留数を求めよ．

(2) 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{1 - 2a\sin x + a^2} dx$$

を求めよ．

(3) 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2x}{1 - 2a\sin x + a^2} dx$$

を求めよ．

$\boxed{4}$ n を自然数，$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする．ベクトル値関数 $z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対する微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt} = A^n z \qquad (0 < t < \infty), \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} z(t) = z_0 \end{cases}$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $n = 1$ のとき，解 $z(t)$ を求めよ．

(2) $n = 9$ のとき，解 $z(t)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ n は 2 以上の整数とし, k は正の整数とする．n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は同じ確率分布に従うとする．$\mu_k = E[(X_1 - E[X_1])^k]$ とし, $\mu_4 < \infty$ とする．また, $\mu_2 > 0$ とする．$\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とし，$T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$ とする．以下の設問に答えよ.

(1) T_n は μ_2 の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(2) 分散 $V[T_n]$ を μ_2 と μ_4 を用いて表せ.

(3) $n \to \infty$ のとき, T_n は μ_2 の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

$\boxed{6}$ n は 2 以上の整数とする．σ は正の実数とする．実数列 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ は, 任意の 2 以上の n に対して, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(z_i - \overline{z}_n)^2 \neq 0$ を満たすとする．ここで, $\overline{z}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i$ である．実数値確率変数列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ は独立で, 各 ε_i は期待値 $E[\varepsilon_i] = 0$, 分散 $V[\varepsilon_i] = \sigma^2$ とする．各 $i = 1, \ldots, n$ に対して,

$$Y_i = \alpha + \beta z_i + \varepsilon_i$$

とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ で, (α, β) は未知とする．$Y_1, \ldots, Y_n$ と $z_1, \ldots, z_n$ を用いた (α, β) の最小 2 乗推定量を $(\widehat{\alpha}_n, \widehat{\beta}_n)$ とする．次の設問に答えよ.

(1) $\widehat{\alpha}_n$ と $\widehat{\beta}_n$ を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\widehat{\alpha}_n - \alpha\right)\left(\widehat{\beta}_n - \beta\right)\right] = 0$ であるための必要十分条件を実数列 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ を用いて表せ.

数理科学 II

以下の 10 問の中から 4 問を選んで, それぞれ別の答案用紙に解答せよ.

$\boxed{1}$ 距離空間 (X, d) を

$$X = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ は連続関数} \right\},$$
$$d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

で定義する.

$$A = \left\{ f \in X \;\middle|\; \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\},$$
$$B = \left\{ f \in X \;\middle|\; \text{任意の } x \in [0,1] \text{ に対して } f(x) > 0 \text{ をみたす} \right\},$$
$$C = \left\{ f \in X \;\middle|\; \text{任意の } x \in (0,1) \text{ に対して } f(x) > 0 \text{ をみたす} \right\}$$

とする. 以下の設問に答えよ.

(1) A は (X, d) の閉集合であることを示せ.

(2) B は (X, d) の開集合であることを示せ.

(3) C は (X, d) の開集合でも閉集合でもないことを示せ.

$\boxed{2}$ f を実変数実数値関数とする. 実数 M が, すべての実数 x に対して $f(x) \geq M$ をみたすとき, M を f の下界という. f に下界が存在するとき, f は下に有界であるという. また, f の下界のうち最大のものを f の下限と呼び, $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ で表す. 以下の設問に答えよ.

(1) 以下の関数は下に有界であるか, 理由を付して答えよ.

(a) $g(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$

(b) $h(x) = x$ $(x \in \mathbb{R})$

(2) $\inf_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 0$ が成り立つことを示せ.

(3) 関数 f が下に有界であるとき $c = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ が存在する. この c に対して以下の (a), (b) を示せ. 必要ならば (b) の証明には (a) を用いてよい.

(a) 任意の正の実数 ε に対し, ある実数 x_ε が存在して $f(x_\varepsilon) < c + \varepsilon$ が成り立つ.

(b) ある実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $f(a_n) \to c$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

$\boxed{3}$ 2 次の正方行列 A の固有値は $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ であり, 固有値 λ_1 に属する固有ベクトルは $\mathbf{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 固有値 λ_2 に属する固有ベクトルは $\mathbf{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) A を求めよ.

(2) $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ と表せる. ただし, $P_1,\ P_2$ は 2 次の正方行列で

$$\begin{aligned} {P_i}^2 &= P_i \qquad (i = 1, 2), \\ P_i P_j &= 0 \quad (i \neq j,\ i, j = 1, 2), \\ {}^t P_i &= P_i \qquad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

をみたしている. ここで, ${}^t P_i$ は P_i の転置行列である. $P_1,\ P_2$ を求めよ.

(3) A^n を求めよ.

$\boxed{4}$ n を非負整数とする. 複素数を係数とする変数 z の多項式で次数が n 以下のもの全体を P_n とする. 多項式の通常の和と実数倍の演算により, P_n を実ベクトル空間とみなす. $f, g \in P_n$ に対して

$$(f, g) = \frac{1}{2}\int_L \mathrm{Re}\left(f(z)\overline{g(z)}\right) dz, \tag{a}$$

$$A(f) = \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz \tag{b}$$

と定める. ここで L は複素平面の実軸上で -1 から 1 へ向かう経路, C は複素平面の原点を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一周する経路とする. また, 複素数 w に対して, $\mathrm{Re}\,(w)$ は w の実部, $\overline{w}$ は w の複素共役を表す. 以下の設問に答えよ.

(1) 式 (a) は P_n 上の内積を定めることを示せ.

(2) 内積 (a) に関する P_n の正規直交基底を, $n = 0$ と $n = 2$ の場合に求めよ.

(3) 式 (b) で定まる線型写像 $A : P_n \to P_0$ による, P_n の核 $\mathrm{Ker}\, A = \{f \in P_n \mid A(f) = 0\}$ の次元を求めよ.

(4) 式 (b) で定まる線型写像 $A : P_2 \to P_0$ の, (2) で求めた P_2 と P_0 の基底に関する表現行列を求めよ.

$\boxed{5}$ 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続, かつ,

$$\text{(G)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{|x|}=\infty$$

を満たすとする. 以下の設問に答えよ.

(1) 実数 b に対し, $f(x)-bx$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数として最小値をもつことを示せ.

(2) 関数 f が C^1 関数のとき, f の導関数 f' は, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数として全射であることを示せ.

(3) 関数 f が C^1 関数で, さらに, 以下の条件を満たすとする.

(C)　$x\neq y$ を満たす任意の $x,y\in\mathbb{R}$ に対し, $f(x)-f(y)>f'(y)(x-y)$ が成り立つ.

このとき, f' は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数として単射であることを示せ.

$\boxed{6}$ f, f_n $(n=1,2,3,\dots)$ を区間 $[0,1]$ 上の実数値ルベーグ可測関数とし，μ を区間 $[0,1]$ 上のルベーグ測度とする．任意の正の実数 ε に対し

$$\lim_{n\to\infty}\mu\Big(\Big\{x\in[0,1]\,\Big|\,|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\Big\}\Big)=0$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束するという．以下の設問に答えよ．

(1) すべての $x\in[0,1]$ に対し $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ ならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束することを示せ．

(2) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\min\{1,|f_n(x)-f(x)|\}\,d\mu(x)=0$ ならば，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に測度収束することを示せ．

(3) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に測度収束するならば，$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\min\{1,|f_n(x)-f(x)|\}\,d\mu(x)=0$ であることを示せ．

$\boxed{7}$ n は正の整数とする．θ は正の実数で未知パラメータとする．n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は平均 θ, 分散 θ の正規分布 $N(\theta, \theta)$ に従うとする．$X_1, \ldots, X_n$ を用いた θ の最尤推定量を $\widehat{\theta}_n$ とする．$S_n^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) $\widehat{\theta}_n$ を求めよ．

(2) $n \to \infty$ のとき, $\widehat{\theta}_n$ は θ の一致推定量であることを示せ．

(3) $n \to \infty$ のとき, $\sqrt{n}\left(S_n^2 - E[S_n^2]\right)$ の漸近分布を求めよ．

(4) $n \to \infty$ のとき, $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)$ の漸近分布を求めよ．

$\boxed{8}$ n は正の整数で, θ は正の実数とする．n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率密度関数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{\theta^2 - x^2}} & (0 < x < \theta) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

をもつ確率分布に従うとする．$S_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 任意の正の整数 n に対して

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq \int_0^1 x^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \leq \frac{1}{n+1}$$

となることを示せ．

(2) S_n は θ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ．

(3) $n \to \infty$ のとき, S_n は θ の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ．

$\boxed{9}$ n は 2 以上の整数とし, θ は非負の実数とする. α は実数で, $0 < \alpha < 1$ とする. C_n は n に依存する実数で, $0 < C_n < 1$ とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は $(\theta, \theta + 1)$ 上の一様分布に従うとする. 帰無仮説を $H_0 : \theta = 0$，対立仮説を $H_1 : \theta > 0$ とする. 有意水準 α の仮説検定を実施するために，次の判定ルールを用いる:

$$X_{(n)} \geq 1 \text{ または } X_{(1)} \geq C_n \text{ のとき，} H_0 \text{ を棄却する.}$$

ここに，$X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ である. 以下の設問に答えよ.

(1) $(X_{(1)}, X_{(n)})$ の同時確率密度関数は

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(n)}; \theta) = \begin{cases} a_n \left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)^{n-2} & (\theta < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta + 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる. このとき，n に依存する実数 a_n を求め，さらに，$X_{(1)}$ の確率密度関数を導出せよ.

(2) この仮説検定において, H_0 の下で H_0 を棄却する確率が α となる棄却限界値 C_n を決定せよ.

(3) (2) で求めた C_n を用いた仮説検定において, H_1 の下で H_0 を棄却する確率を $\gamma_n(\theta)$ とする. このとき，$\gamma_n(\theta)$ を求めよ.

$\boxed{10}$ n は 2 以上の整数, θ は実数で, $0 < \theta < 1$ とする. n 個の実数値確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ は互いに独立で, 各 X_i $(i = 1, \ldots, n)$ は確率関数

$$P(X_i = x) = \theta(1-\theta)^x \qquad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

をもつ確率分布に従うとする. $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とすると, Y_n は確率関数

$$P(Y_n = y) = \frac{(n+y-1)!}{y!(n-1)!}\theta^n(1-\theta)^y \qquad (y = 0, 1, 2, \ldots)$$

をもつ確率分布に従う. ただし, $0! = 1$ とする. θ の推定量 $\widetilde{\theta}_n$ を

$$\widetilde{\theta}_n = \frac{n-1}{n-1+\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

とする. $X_1, \ldots, X_n$ を用いた θ の最尤推定量を $\widehat{\theta}_n^{(\mathrm{ML})}$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\widetilde{\theta}_n$ は θ の不偏推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| E\left[\widehat{\theta}_n^{(\mathrm{ML})}\right] - \theta \right|$ を計算せよ.

(3) $n \to \infty$ のとき, $\widehat{\theta}_n^{(\mathrm{ML})}$ は θ の一致推定量であるか否か, 理由を付して答えよ.