無裁定理論

京都大学大学院理学研究科数学教室
修士課程 2 年

濵口雄史

平成 30 年 1 月 21 日

目 次

0　序

本修士論文では, 現代の数理ファイナンスにおいて最も基本となる無裁定理論についてまとめた. 裁定機会とは, 直観的に言えば「無リスクで利益を得られるような投資戦略」を指す. もしこのような投資戦略が存在したとすると, 理性的な投資家はこのような投資戦略により富を増大させるだろう. その結果, 需要と供給の関係からマーケットの資産価格は変動し, 裁定機会は消失すると考えられる. それゆえ経済学で用いられる均衡マーケットでは, このような裁定機会は存在しないという要請が課せられる. 無裁定理論は, 裁定機会が存在しない (無裁定) という条件の数学的定式化を図る理論である.

無裁定の概念は, F. Black および M. Scholes の論文 [2] で導入された. 彼らは, 幾何ブラウン運動で表現される株価過程モデル (Black-Scholes model) において, 無裁定の概念を用いることでオプションの価格が一意的に決定することを示した. その後より一般のマーケットモデルにおける無裁定理論が展開された. M. Harrison, D. Kreps, S. Pliska らの論文 [13], [14] により, 有限確率空間上で定義される有限時間モデルにおいて, マーケットが無裁定であることと価格過程がある同値確率測度の下でマルチンゲールとなることが同値であることが証明された. これは数理ファイナンスの基本定理 (Fundamental Theorem of Asset Pricing) と呼ばれ, 現代のファイナンス理論において広く用いられる重要な概念である. また無裁定という経済学的概念とマルチンゲール理論を結ぶ関係を示唆するという点で非常に興味深い.

本修士論文では, 数理ファイナンスの基本定理について, 有限確率空間上の有限時間モデルから始まり, より一般のマーケットモデルにおける Kreps-Yan の定理を経て, F. Delbaen と W. Schachermayer による最も一般的な形の結果を証明も含めて詳しくまとめた. さらにそこから発展し,[18], [19] で導入された large financial market における無裁定理論のいくつかの先行研究についてまとめた. Large financial market は無限個の証券からなるマーケットであり, 金利マーケットモデルや保険数学などに応用可能性がある. ここでは有限次元の設定では現れなかった近似的な裁定機会の概念が考察対象となる. 近似的な裁定機会に関する先行研究の議論を念頭に, large financial market における基準財変更と無裁定条件に関する筆者の結果を最後の節で述べた. 現在までで large financial market における統一的な理論は無く, さらなる研究の余地があると考えられる.

本修士論文は大きく分けて第 I 部, 第 II 部からなる. 第 I 部では, 主に [8] を参考に有限個の証券からなるマーケットモデルにおける数理ファイナンスの基本定理についてまとめた. 第 1 節では有限確率空間上の有限時間マーケットモデルにおいて無裁定条件を定義し, 数理ファイナンスの基本定理の証明をまとめた. この最も簡単な設定においても, 無裁定理論の本質的な概念が見て取ることができる. 第 2 節で一般のマーケットモデルにおける Kreps-Yan の定理についてまとめ, その主張の経済学的に不十分な点について考察した後, 第 3 節でより精密化された形である Delbaen-Schachermayer の定理の証明を与えた. Delbaen-Schachermayer の定理ではセミマルチンゲールの一般論および関数解析的な議論を多岐にわたり用いることとなる. そこで第 3.1 節で, [5], [8], [16], [27], [4] を参考にセミマルチンゲールに関するベクトル確率積分について詳しくまとめた. また無裁定理論で用いられる関数解析的な事実についても, 基本的なもの以外はその都度証明を与えるよう努めた. 第 3.3 節では, Delbbaen-Schachermayer の定理に対し, 抽象的なモデルにおける [17] の議論を本修士論文の設定に適用することで, 元論文 [9] および文献 [8] のものより簡潔な証明を与えた. 第 II 部では, 第 I 部での議論を念頭に large financial market における数理ファイナンスの基本定理についてまとめた. 第 4 節では確率空間の無限列で表現される large financial market における近似的な裁定機会を定義し, それに関する無裁定条件についての重要な先行研究をまとめた. 第 5 節では一つの確率空間上の無限次元セミマルチンゲールとして表現される large financial market を考える. ここでは [6] の抽象的なモデルを本修士論文の設定に適用し, 数理ファイナンスの基本定理について議論した. 最後にこのマーケットモデルにおいて, 基準財変更と無裁定条件の関係性に関する筆者の結果をまとめた. また, 非常に単純な large financial market の例を考え, この簡単な設定の下でも有限次元との本質的な差異が見られることを示した. さらに, この例において, 無裁定条件が基準財変更により保存しないことを示した.

<u>Notation</u>

- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- $a \wedge b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$.
- 集合 A に対し, A の定義関数を $\mathbb{1}_A$ と書く.
- 線形空間 X の部分集合 A に対し, A の元の凸結合 (convex combination) 全体を $\mathrm{conv}(A)$ と書く. すなわち $\mathrm{conv}(A)$ は有限個の $x_1, \cdots, x_n \in A$ および convex weight $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (i.e. $\lambda_i \geq 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$) を用いて $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ と書ける x 全体の集合である.
- 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の二つの確率測度 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ について, $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{P}$ について絶対連続であるとき $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ と書く. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ かつ $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ であるとき, $\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は同値であると言い, $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ と表す. また $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ であるとき, $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{P}$ に関する Radon-Nikodym 導関数を $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ と表す.
- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対し, $\mathbb{P}$-a.s. で有限な $\mathcal{F}$-可測関数全体を同値関係 $f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} f = g$ a.s. で割った集合を $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ と書く.$L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の元 $[f]$ を代表元を用いて単に f などと表す. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $\mathbb{P}$ に関する確率収束位相で F-空間となることが知られている. 列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が $f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に $n \to \infty$ で確率収束するとき, $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $f^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f$ などと書く.
- 空間 $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \in [0, \infty]$ に対し,
$$L^p_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=} \{f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid f \geq 0,\ \mathbb{P}\text{-a.s.}\},$$
$$L^p_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \overset{\text{def}}{=} \{f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid f \leq 0,\ \mathbb{P}\text{-a.s.}\}$$
と書く.
- 確率測度 $\mathbb{P}$ に関する期待値を $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ などと表す. $\mathbb{P}$ への依存性が文脈から明らかな場合は単に $\mathbb{E}$ と書く.
- càdlàg 確率過程 (a.s. で右連続かつ左極限を持つ確率過程) $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ に対し, $X^* = (X^*_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $X^*_t \overset{\text{def}}{=} \sup_{s\in[0,t]} |X_s|$ と定義し, $X^*_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{s\in\mathbb{R}_+} |X_s|$ と書く. また $X_- = (X_{t-})_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $X_{0-} \overset{\text{def}}{=} 0$, $t > 0$ に対して $X_{t-} \overset{\text{def}}{=} \lim_{s\uparrow t} X_s$ と定義し, $\Delta X = (\Delta X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ と定義する.

- フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上の適合過程 X および停止時刻 τ に対し, 停止過程 $X^\tau = (X^\tau_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を $X^\tau_t \overset{\text{def}}{=} X_{\tau\wedge t}$ と定義する.
- フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上の二つの停止時刻 σ, τ に対し,

$$[\![\sigma,\tau[\![= \{(\omega,t) \mid t\in\mathbb{R}_+,\ \sigma(\omega)\le t<\tau(\omega)\},$$

$$]\!]\sigma,\tau]\!] = \{(\omega,t) \mid t\in\mathbb{R}_+,\ \sigma(\omega)< t\le\tau(\omega)\}$$

などと表す (stochastic interval).

第I部
有限個の証券からなるマーケットモデル

1　有限確率空間上の有限時間マーケットモデル

1.1　モデルの設定

有限確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を考える. ただし $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ とし, 各 $n = 1, \ldots, N$ に対し $\mathbb{P}\{\omega_n\} > 0$ であるとする. このとき $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数の空間は, 位相線形空間として $\mathbb{R}^N$ と同一視できる. すなわち

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

が成立する. しかし, 一般の確率空間における場合での議論と関連付けるため, それぞれの空間を区別して表記することにする.

有限個の時間の集合 $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ を考え, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ をフィルトレーションとする. すなわち各 $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族であり, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ を満たすとする. 記号の簡略化のため $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ と仮定する. 経済学的には σ 加法族 $\mathcal{F}_t$ は時刻 t における情報の集まりと考えられ, フィルトレーションは時間の増大に関して情報量が増大していくことを表している.

d 個の証券 (危険資産) の価格の時間発展挙動を, フィルトレーション $\mathbb{F}$ に適合的な $\mathbb{R}^d$-値確率過程 $S = (S^1, \ldots, S^d)$ により表現する. また, 補助的に安全資産の価格過程 $S^0 \equiv 1$ を考える. すなわちすべての資産価格は安全資産 S^0 による割引価格を表すこととする. ここでは, 最も基本的な有限確率空間上の有限時間マーケットモデルを考えることとなる. この簡単な場合においても, 後に見るように裁定理論における最も本質的な概念が現れる.

まず, 上で定義したマーケット S における投資戦略 (trading strategy) を定義する.

定義 1.1. $\mathbb{R}^d$-値可予測過程 $H = (H_t)_{t=1}^T = (H_t^1, \ldots, H_t^d)_{t=1}^T$ を**投資戦略**と呼び, 投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}$ と書く. ここで確率過程 H が可予測であるとは, 各 $t = 1, \ldots, T$ に対し H_t が $\mathcal{F}_{t-1}$-可測であることを意味する. 投資戦略 $H \in \mathcal{H}$ に対し, 確率積分 $H \cdot S$ を

$$(H \cdot S)_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{u=1}^{t} (H_u, \Delta S_u), \ t = 1, \ldots, T \tag{1.2}$$

により定義する. ただし $\Delta S_u = S_u - S_{u-1}$ であり, $(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^d$ の標準内積を表す.

この定義において, $(H \cdot S)_t$ は投資戦略 H に従う, 時刻 t までの累計 (割引) 損益額を表す.

1.2　無裁定条件と数理ファイナンスの基本定理

この節では, 上で定義した有限確率空間上の有限時間マーケットモデルにおける無裁定条件を定式化し, マーケットが無裁定となるための必要十分条件を求める. まず, 無裁定条件を定義するために, 初期資産 0 で複製可能なクレーム（条件付請求権）の集合を導入する.

定義 1.2. 集合 $\mathcal{K}, \mathcal{C}$ を次のように定義する;

- 初期資産 0 で複製可能なクレームの集合 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\} \tag{1.1}$$

  と定義する;

- 初期資産 0 で優ヘッジ可能なクレームの集合 $\mathcal{C}$ を

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \exists f \in \mathcal{K} \text{ s.t. } g \leq f\} \tag{1.2}$$

  と定義する.

明らかに $\mathcal{K}$ は $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分空間, $\mathcal{C}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐である. この記号を用いて, 無裁定条件は次のように定義される.

定義 1.3. マーケット S は,

$$\mathcal{K} \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \tag{1.3}$$

を満たすとき, **無裁定 (No Arbitrage, (NA))** であるという.

すなわち, マーケットが無裁定であるとは, 初期資産 0 から始まり, 満期 T における資産が非負かつ正の確率で正となる投資戦略（裁定機会（arbitrage opportunity））が存在しないことを表す. もしこのような投資戦略が存在するなら, 証券の保有量を大きくすることで, 投資家は無リスクで無限に大きい富を得ることができる. しかしこのような戦略は効率的な投資家達によりすぐに市場で取引されるため, 需要と供給の関係から価格が変動し, 直ちに裁定機会は消滅する. このような理由から, 成熟し均衡化されたマーケットの数理モデルとして無裁定条件が要請される. また無裁定条件を根拠にデリバティブ (金融派生商品）の価格付け理論が展開され, 実際に実務においてもこのような方法で価格付けが行われている.

ここで, 無裁定条件 (1.3) は

$$\mathcal{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \tag{1.4}$$

と同値であることに注意する. 後述の数理ファイナンスの基本定理において, $\mathcal{K}$ よりもむしろ凸錐 $\mathcal{C}$ の方が本質的な役割を持つことが見て取れる.

次に, マルチンゲール測度および同値マルチンゲール測度を定義する.

定義 1.4. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q}$ で, 価格過程 S が $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールとなるようなものを S の**マルチンゲール測度**と呼ぶ. また, $\mathbb{P}$ と同値（$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$）であるようなマルチンゲール測度を**同値マルチンゲール測度**と呼ぶ. S のマルチンゲール測度全体の集合を $\mathcal{M}(S)$, 同値マルチンゲール測度全体の集合を $\mathcal{M}^e(S)$ と書く.

後述の数理ファイナンスの基本定理は, 無裁定条件と同値マルチンゲール測度の存在性が（本質的に）同値であることを示す. 次の補題によりマルチンゲール測度が特徴付けされる.

補題 1.5. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q}$ に対し, 次の 3 条件は同値である;

(i) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(S)$;

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = 0,\ \forall f \in \mathcal{K}$;

(iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] \leq 0,\ \forall g \in \mathcal{C}$.

証明. $(i) \ \Leftrightarrow\ \forall t = 1, \ldots, T,\ \forall A \in \mathcal{F}_{t-1},\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A \Delta S_t] = 0 \ \Leftrightarrow\ (ii)$.
$(ii) \ \Leftrightarrow\ (iii)$ は明らか. □

注意 . S のマルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ の下で, 確率積分 $H \cdot S$ はマルチンゲールとなることに注意する. 実際, H_t は $\mathcal{F}_{t-1}$-可測であるから,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((H_t, \Delta S_t)|\mathcal{F}_{t-1}) = H_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0 \tag{1.5}$$

が成立する.

数理ファイナンスの基本定理の証明において, 無裁定条件の下で $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\cong \mathbb{R}^N)$ の凸錐 $\mathcal{C}$ が閉集合となることが本質的な役割をもつ. 次の補題は, 有限次元ユークリッド空間における閉錐集合の Minkowski 和が再び閉集合となるための十分条件を与える.

補題 1.6. $\mathbb{R}^N$ の二つの閉錐部分集合 $A_1,\ A_2$（凸でなくてもよい）が, 正半独立（i.e. $\forall x \in A_1, \forall y \in A_2$ に対し, $x + y = 0$ ならば, $x = y = 0$ となる）ならば, $A_1 + A_2$ は閉である.

証明. $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A_1 + A_2$ で $z_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} z \in \mathbb{R}^N$ なるものを取る. $z \in A_1 + A_2$ となることを示す. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $z_k = x_k + y_k$ $(x_k \in A_1,\ y_k \in A_2)$ と書ける.

1. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が有界の場合

   ある部分列 $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ が存在し, $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = \exists x \in \mathbb{R}^N$ となる. A_1 は閉であるから, $x \in A_1$ となる. このとき $y_{k_l} = z_{k_l} - x_{k_l}$ は $z - x$ に収束し, A_2 が閉であることより, $z - x \in A_2$ となる. したがって $z \in A_1 + A_2$ となる.

2. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が非有界の場合

   ある部分列 $\{k_l^1\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ が存在し, $x_{k_l^1} \neq 0$ かつ $\lim_{l\to\infty} |x_{k_l^1}| = \infty$ となる. ゆえに

$$\frac{1}{|x_{k_l^1}|}(x_{k_l^1} + y_{k_l^1}) \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{1.6}$$

   が従う. さらに部分列 $\{k_l^2\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在し,

$$\frac{1}{|x_{k_l^2}|} x_{k_l^2} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \exists x \in \mathbb{R}^N \tag{1.7}$$

   となる. 明らかに $x \neq 0$ である. また A_1 は閉錐なので, $x \in A_1$ である. さらにこのとき

$$\frac{1}{|x_{k_l^2}|} y_{k_l^2} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \exists y \in \mathbb{R}^N \tag{1.8}$$

   となり, A_2 が閉錐であることより, $y \in A_2$ となる. 今, $x + y = 0$ となるが, これは A_1 と A_2 が正半独立であるという仮定に矛盾する.

□

命題 1.7. S が無裁定ならば, $\mathcal{C}$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\cong\mathbb{R}^N$ の閉凸錐となる.

証明. 明らかに $\mathcal{C}$ は凸錐である. $L_- = \{x\in\mathbb{R}^N \mid (x,\omega)\le 0,\ \forall\omega\in\Omega\}$ とおくと, $\mathcal{C}=K+L_-$ と書ける. 今, $f\in\mathcal{K}$, $g\in L_-$ に対し, $f+g=0$ とすると, $f=-g\in L_+$ となり, 無裁定条件より $f=g=0$ となる. ゆえにこのとき $\mathcal{K}$ と L_- は $\mathbb{R}^N$ の正半独立な閉錐部分集合であり, 補題 1.6 より $\mathcal{C}$ は閉集合となる. □

ここで, 補題 1.6 および命題 1.7 の証明は有限次元特有の性質（Bolzano-Weierstrass の定理）を用いていることに注意する. また, 補題 1.6 において正半独立であるという条件は本質的である. すなわち, $\mathbb{R}^N$ の二つの閉凸錐 A_1, A_2 に対し, A_1+A_2 は凸錐であるが, 一般には閉であるとは限らない.

例 1.8 (反例)**.** $\mathbb{R}^3$ の二つの閉凸錐部分集合

$$A_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2}\le z\}\ ,\ A_2=\{-t(1,0,1)\mid t\in\mathbb{R}_+\} \tag{1.9}$$

を考える (A_1 と A_2 は正半独立でない). $t\ge 2$ のとき $\left(t,1+\frac{1}{t},t+\frac{1}{t}\right)\in A_1$ であることに注意する. しかし

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(t,1+\frac{1}{t},t+\frac{1}{t}\right)-t(1,0,1)\right)=(0,1,0)\notin A_1+A_2 \tag{1.10}$$

となるため, A_1+A_2 は閉ではない.

上の議論に注意して, 数理ファイナンスの基本定理を証明する.

定理 1.9 (数理ファイナンスの基本定理 (Harrison-Pliska, 1981))**.** 有限確率空間上の有限時間マーケット S に対し, 次は同値;

(i) S が無裁定;

(ii) $\mathcal{M}^e(S)\neq\phi$.

証明. $\underline{(ii) \implies (i)}$

仮定より $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ が存在する. 補題 1.5 より

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\le 0,\ \forall g\in\mathcal{C} \tag{1.11}$$

が成立する. 一方, もし $g\in\mathcal{C}\cap L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で $g\neq 0$ であるものが存在したとすると, $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$ に注意して $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]>0$ となり矛盾が生じる. したがって S は無裁定である.

$\underline{(i) \implies (ii)}$

$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\cong\mathbb{R}^N$ の単位ベクトル $(\mathbb{1}_{\{\omega_n\}})_{n=1}^N$ の凸包を考える;

$$P\overset{\text{def}}{=}\left\{\sum_{n=1}^N\mu_n\mathbb{1}_{\{\omega_n\}}\mid \mu_n\ge 0,\sum_{n=1}^N\mu_n=1\right\}. \tag{1.12}$$

明らかに P は $L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の凸部分集合であり, $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\cong\mathbb{R}^N$ においてコンパクトである. また, 命題 1.7 より $\mathcal{C}$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\cong\mathbb{R}^N$ の閉凸部分集合である. さらに, 仮定 (NA) より

$$\mathcal{C}\cap P=\phi \tag{1.13}$$

が成立する. したがって Hahn-Banach の分離定理（閉凸とコンパクト凸の強分離）より, ある $\mathbb{Q} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R}^N$ が存在し,

$$\sup_{g \in \mathcal{C}} (\mathbb{Q}, g) < \inf_{h \in P} (\mathbb{Q}, h) \tag{1.14}$$

が成立する. 今, $\mathcal{C}$ が凸錐であることより $\sup_{g \in \mathcal{C}} (\mathbb{Q}, g) \leq 0$, $0 \in \mathcal{C}$ より $\sup_{g \in \mathcal{C}} (\mathbb{Q}, g) = 0$ となる. 特に

$$(\mathbb{Q}, \mathbb{1}_{\{w_n\}}) > 0 \ , \ \forall n = 1, \ldots, N \tag{1.15}$$

となり, 正規化することにより $\mathbb{Q}$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の $\mathbb{P}$ と同値な確率測度となることがわかる. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] = (\mathbb{Q}, g) \leq 0$ $(\forall g \in \mathcal{C})$ に注意して, 補題 1.5 より $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(S)$ となる. □

数理ファイナンスの基本定理は, 無裁定という経済学的に意味を持つ概念とマルチンゲール理論の架け橋となる重要な定理であり, またその証明は Hahn-Banach の分離定理という幾何学的性質の強い定理が本質的に用いられているという点で非常に興味深い.

上の証明からわかる通り, $(ii) \Rightarrow (i)$ はほとんど明らかで, 逆の関係 $(i) \Rightarrow (ii)$ の証明が困難である. $(i) \Rightarrow (ii)$ の証明を整理すると, 次のような流れとなる.

1. 無裁定条件の下, $\mathcal{C}$ が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R}^N$ の閉凸部分集合となる.
2. Hahn-Banach の分離定理より, $\mathcal{C}$ と $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ のあるコンパクト凸部分集合（P）を分離する超平面 ($\mathbb{Q} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \cong \mathbb{R}^N$) の存在性が従う.
3. マルチンゲール測度の $\mathcal{C}$ に関する特徴づけ（補題 1.5）により, 正規化された $\mathbb{Q}$ が S の同値マルチンゲール測度となることがわかる.

一般の確率空間上の連続時間マーケットモデルにおいても, 数理ファイナンスの基本定理の非自明な主張（無裁定 $\Rightarrow$ 同値マルチンゲール測度が存在）は上の流れで証明できる. ただしその場合, 最初のステップ (無裁定 $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ が閉集合）の証明が非常に複雑となる. 有限確率空間上の有限時間マーケットモデルにおける最初のステップは命題 1.7 により保障されるが, 前述の通りこの証明方法は有限次元特有の性質に強く依存している. 一般の場合には, Hahn-Banach の分離定理を適用するために, 無裁定条件を若干強めた条件の下で $\mathcal{C}$ が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相で閉集合となることを示す必要がある.

2 No Free Lunch

2.1 一般のマーケットモデル

ここでは一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の連続時間マーケットモデルを考える. 時間集合を $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ とし, フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ は通常の条件 (i.e. 右連続かつ $\mathcal{F}_0$ は零集合全体を含む) を満たすとする.

d 個の危険資産の割引価格過程 $S = (S_t)_{t \geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$-値 càdlàg 適合過程とし, ここでは S は局所有界であると仮定する. 特に Black-Scholes モデル (幾何ブラウン運動モデル) など連続な経路を持つ確率過程は局所有界な価格過程である.

まず, 単純戦略 (simple strategy) とその確率積分, および許容的 (admissible) な投資戦略の概念を導入する.

定義 2.1. $\mathbb{R}^d$-値可予測過程 $H = (H_t)_{t\geq 0}$ ($H_0 = 0$ とする) で次の形のものを**単純戦略 (simple strategy)** と呼ぶ;

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{1}_{\rrbracket \tau_{i-1}, \tau_i \rrbracket}. \tag{2.1}$$

ただし, $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n < \infty$ は a.s. で有限な停止時刻, 各 h_i は $\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$-可測な $\mathbb{R}^d$-値確率変数である. この H に対し, 確率積分 $H \cdot S$ を次の確率過程として定義する;

$$(H \cdot S)_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} (h_i, S_{\tau_i \wedge t} - S_{\tau_{i-1} \wedge t}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{d} h_i^j (S^j_{\tau_i \wedge t} - S^j_{\tau_{i-1} \wedge t}),\ t \in [0, \infty). \tag{2.2}$$

また, その終端確率変数を

$$(H \cdot S)_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} (h_i, S_{\tau_i} - S_{\tau_{i-1}}) \tag{2.3}$$

と定義する. 停止過程 S^{τ_n} および $h_1, \ldots, h_n$ が一様有界であるとき, 単純戦略 H は**許容的 (admissible)** であるという. 許容的な単純戦略全体の集合を $\mathcal{H}^{\text{simple}}$ と書く.

上の定義は H の具体的な形 (2.1) に依らず well-defined であることに注意する.

定義 2.2. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q}$ で $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ かつ S が $\mathbb{Q}$ の下で局所マルチンゲールとなるものを, S の**局所マルチンゲール測度**と呼ぶ. また, 局所マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ で $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ であるものを S の**同値局所マルチンゲール測度**と呼ぶ. 局所マルチンゲール測度全体の集合を $\mathcal{M}(S)$, 同値局所マルチンゲール測度全体の集合を $\mathcal{M}^e(S)$ と書く.

有限確率空間の場合と同様に, 初期資産 0 で単純戦略によりヘッジ可能なクレームの集合を次で定義する;

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{\text{simple}} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(H \cdot S)_\infty \mid H \in \mathcal{H}^{\text{simple}}\}, && (2.4)\\
\mathcal{C}^{\text{simple}} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}^{\text{simple}} - L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \mathcal{H}^{\text{simple}} + L^\infty_-(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) && (2.5)\\
&= \{g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \exists f \in \mathcal{H}^{\text{simple}} \text{ s.t. } g \leq f \text{ a.s.}\}. && (2.6)
\end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{H}^{\text{simple}}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分空間, $\mathcal{C}^{\text{simple}}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐であることに注意する.

有限確率空間における場合と同様に, 局所マルチンゲール測度は $\mathcal{H}^{\text{simple}}$ または $\mathcal{C}^{\text{simple}}$ を用いて特徴付けされる.

補題 2.3. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ に対し, 次の 3 条件は同値;

(i) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(S)$;

(ii) $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] = 0,\ \forall f \in \mathcal{K}^{\text{simple}}$;

(iii) $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[g] \leq 0,\ \forall g \in \mathcal{C}^{\text{simple}}$.

さらに, 任意の局所マルチンゲール測度 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(S)$ の下, $H \in \mathcal{H}^{\text{simple}}$ の確率積分 $H \cdot S$ はマルチンゲールとなる.

証明. $(ii) \iff (iii)$ は明らか.

$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(S)$ とする. このとき停止時刻の増大列 $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ で $\sigma_j \uparrow \infty$ $\mathbb{Q}$-a.s. なるものが存在し, 各停止過程 S^{σ_j} は $\mathbb{Q}$ のもとで一様可積分マルチンゲールとなる. このとき任意の $H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_{i-1},\tau_i]\!]} \in \mathcal{H}^{\mathrm{simple}}$ および任意の時刻 $0 < s < t$ に対し, $\{s < \tau_{k-1}\} \cap \{\tau_{l-1} \leq t < \tau_l\}$ 上で

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((H \cdot S)_t^{\sigma_j} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((H \cdot S^{\sigma_j})_t | \mathcal{F}_s) \tag{2.7}$$

$$= (H \cdot S^{\sigma_j})_s + \sum_{i=k}^{l} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((h_i, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S^{\sigma_j}_{\tau_i \wedge t} - S^{\sigma_j}_{\tau_{i-1}} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}})) | \mathcal{F}_s) \tag{2.8}$$

$$= (H \cdot S^{\sigma_j})_s \tag{2.9}$$

が成立する. ただし第三の等式は S^{σ_j} が $\mathbb{Q}$ のもとで一様可積分マルチンゲールであることおよび任意抽出定理による. したがって各停止過程 $(H \cdot S)^{\sigma_j}$ は $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールとなり, ゆえに確率積分 $H \cdot S$ は $\mathbb{Q}$ の下で局所マルチンゲールとなる. さらに H が許容的であることより $H \cdot S$ は一様有界であり, したがって $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールとなる. すなわち後半の主張が成立し, 特に $(i) \Longrightarrow (ii)$ が従う.

次に $(ii) \Longrightarrow (i)$ を示す. S は局所有界であることから, ある停止時刻の増大列 $\{\sigma_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ で $\sigma_j \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$-a.s. なるものが存在し, 各停止過程 S^{σ_j} は測度 $\mathbb{P}$ に関して有界過程, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ より測度 $\mathbb{Q}$ に関しても有界過程となる. 今, $j \in \mathbb{N}$ を固定すると, 任意の停止時刻 $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \sigma_j$ および $\mathbb{R}^d$-値 $\mathcal{F}_{\tau_1}$-可測有界確率変数 h に対し, 投資戦略 $H = h\mathbb{1}_{]\tau_1,\tau_2]}$ は許容的かつ $(H \cdot S)_\infty = (h, S^{\sigma_j}_{\tau_2} - S^{\sigma_j}_{\tau_1})$ となる. ゆえに仮定 (ii) より $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S^{\sigma_j}_{\tau_2} - S^{\sigma_j}_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = 0$ が従い, S^{σ_j} は $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲールとなることがわかる. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ より $\sigma_j \uparrow \infty$ $\mathbb{Q}$-a.s. に注意して, S は $\mathbb{Q}$ の下で局所マルチンゲール, すなわち $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(S)$ となる. □

単純戦略に関する無裁定条件は次のように定義される.

定義 2.4.

$$\mathcal{K}^{\mathrm{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \ (\iff \mathcal{C}^{\mathrm{simple}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}) \tag{2.10}$$

が成立するとき, マーケット S は単純戦略に関する**無裁定条件** $(NA)^{\mathbf{simple}}$ を満たすという.

補題 (2.3) より, 有限確率空間上の有限時間マーケットの場合と同様に次が成立する.

命題 2.5. $\mathcal{M}^e(S) \neq \phi \Longrightarrow (NA)^{\mathrm{simple}}$

しかしこの場合, 逆は一般には不成立である. 実際, $(NA)^{\mathrm{simple}}$ が成立するが同値局所マルチンゲール測度は存在しない例が構成できる [8]. したがって, 一般のマーケットモデルにおいて同値局所マルチンゲール測度の存在性を保証するためには, $(NA)^{\mathrm{simple}}$ より真に強い条件が必要となる.

2.2 No Free Lunch と Kreps-Yan の定理

$(NA)^{\mathrm{simple}}$ より強い無裁定型条件として No Free Lunch 条件 (NFL) を次で定義する.

定義 2.6.

$$\overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*} \cap L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \tag{2.1}$$

が成立するとき, マーケット S は **No Free Lunch** 条件 (NFL) を満たすという. ここで $\overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}$ は $\mathcal{C}^{\text{simple}}$ の $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における汎弱閉包 (weak*-closure) を表す.

明らかに $(NFL) \Rightarrow (NA)^{\text{simple}}$ が成立する. 一般のマーケットモデルにおいて, (NFL) に関して次の形の数理ファイナンスの基本定理が成立する.

定理 2.7 (Kreps-Yan)**.** $(NFL) \Longleftrightarrow \mathcal{M}^{e}(S) \neq \phi$

証明. $\underline{\mathcal{M}^{e}(S) \neq \phi \Longrightarrow (NFL)}$

$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^{e}(S)$ とする. 補題 2.3 より

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0, \ \forall f \in \mathcal{C}^{\text{simple}}, \tag{2.2}$$

したがって

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0, \ \forall f \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*} \tag{2.3}$$

が成立する. 一方, もし (NFL) が不成立であるとすると, $f \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*} \cap L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ かつ $\mathbb{P}\{f > 0\} > 0$ なるものが存在するが, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ より $f \in L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ かつ $\mathbb{Q}\{f > 0\} > 0$, したがって $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] > 0$ となり, 矛盾が生じる. したがって S は (NFL) を満たす.

$\underline{(NFL) \Longrightarrow \mathcal{M}^{e}(S) \neq \phi}$

$h \in L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で $h \neq 0$ なるものを取る. 仮定より $h \notin \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}$ であるから, Hahn-Banach の分離定理より, ある $g \in L^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が存在し

$$\sup_{f \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}} \langle f, g \rangle < \langle h, g \rangle \tag{2.4}$$

が成立する. ただし $\xi \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ および $\eta \in L^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対し $\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\xi\eta]$ とする. $\overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}$ が錐であることおよび $0 \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}$ より $\sup_{f \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}} \langle f, g \rangle = 0$ となる. さらに, $-L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{C}^{\text{simple}}$ より, 任意の $f \in L_{+}^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対し $\langle f, g \rangle \geq 0$, すなわち $g \in L_{+}^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ である.

今, $\mathcal{G} = \{g \in L_{+}^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \sup_{f \in \overline{\mathcal{C}^{\text{simple}}}^{*}} \langle f, g \rangle = 0\}$, $\mathcal{S} = \{\{\omega \mid g(\omega) > 0\} \in \Omega \mid g \in \mathcal{G}\}$ とおく. $0 \in \mathcal{G}$(または上の議論) より $\mathcal{G} \neq \phi$ である. また, $\mathcal{S}$ は可算加法的である. 実際, $\mathcal{G}$ は $L^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ のノルム位相で閉な凸錐であることに注意して, $g_n \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対し

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\mathbb{E}[g_n])^{-1} g_n \in \mathcal{G}, \tag{2.5}$$

ゆえに

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g_n > 0\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\mathbb{E}[g_n])^{-1} g_n > 0 \right\} \in \mathcal{S} \tag{2.6}$$

となる. ゆえに, ある $g_0 \in \mathcal{G}$ が存在し, $\mathbb{P}\{g_0 > 0\} = \sup\{\mathbb{P}\{g > 0\} \mid g \in \mathcal{G}\}$ となる.

このとき, $g_0 > 0$ a.s. が成立する. 実際, $\mathbb{P}\{g_0 > 0\} < 1$ と仮定すると, 上の Hahn-Banach の議論を $h = \mathbb{1}_{\{g_0 = 0\}} \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \setminus \{0\}$ に対し適用することで,

$$\exists g_1 \in \mathcal{G} \text{ s.t. } \langle h, g_1 \rangle = \int_{\{g_0 > 0\}} g_1 d\mathbb{P} > 0 \tag{2.7}$$

したがって $g_0+g_1 \in \mathcal{G}$ かつ $\mathbb{P}\{g_0+g_1>0\}>\mathbb{P}\{g_0>0\}$ となるが, これは g_0 の取り方に矛盾する.

そこで, 確率測度 $\mathbb{Q}$ を $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=\frac{g_0}{\mathbb{E}[g_0]}$ により定義すると, $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$ かつ

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]\le 0,\ \forall f\in\mathcal{C}^{\mathrm{simple}} \tag{2.8}$$

となり, 補題 2.3 より $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^e(S)$ となる. □

注意 . クレーム g_0 が **free lunch** であるとは, $g_0\in L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ かつ $g_0\neq 0$ であり, あるネット $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\subset L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ および $(H^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\mathcal{H}^{\mathrm{simple}}$ が存在し, $g_\lambda\le(H^\lambda\cdot S)_\infty$ かつ $w^*\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda}g_\lambda=g_0$ が成立することをいう. すなわち一般に g_0 は優ヘッジ可能なクレームとしては表せないが, g_0 にある意味でいくらでも近いクレーム g_λ が取れる. ここで, $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の汎弱位相を考える上での次のような難点が生じる;

(i) ネット $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で置き換えることはできない;

(ii) $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ または $((g_\lambda)_-)_{\lambda\in\Lambda}$ が $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ のノルムに関して有界に取れるとは限らない. つまり, $\overline{\mathcal{C}^{\mathrm{simple}}}^*$ の元の近似ネットを, 所与の破産限度額 (credit line) を超えないように取れるとは限らない;

(iii) $\mathcal{C}^{\mathrm{simple}}$ を $\mathcal{K}^{\mathrm{simple}}$ で置き換えることはできない.

ただし, 価格過程 S が連続である場合, 上の三つの難点は克服されることが知られている.

つまり, Kreps-Yan の定理 (定理 2.7) は Harrison-Pliska の数理ファイナンスの基本定理 (定理 1.9) の一般のマーケットモデルへの一般化であるが, そのままの形では経済学的な要請を満たさない. これを解決するために, $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の汎弱位相をより強い位相 (理想的には一様収束位相) で置き換えた無裁定型条件 (すなわち (NFL) よりも若干弱い条件) を考える必要がある.

(NFL) の定義における $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の汎弱位相に関する難点は, 本質的には許容的な投資戦略を単純戦略に制限していることに起因する. 後に定義する No Free Lunch with Vanishing Risk 条件 $(NFLVR)$ や No Free Lunch with Bounded Risk 条件 $(NFLBR)$ は, 投資戦略として一般の可積分可予測過程, すなわち連続的な取引による投資戦略を考えることとなる. 直観的に言えば, このような投資戦略の一般化はある種の極限操作を含むため, $\mathcal{K}$ および $\mathcal{C}$ はその閉包により「近く」なる. もちろん現実のマーケットでは連続的な取引は有り得ないが, 価格過程の解析をするために連続取引を考えることで議論の見通しがよくなることが多くある. 実際, このような一般の被積分確率過程を考えることで, 伊藤清氏が導入した確率積分や確率微分方程式など確率解析の枠組みでの議論が可能となる. また連続取引は短い時間間隔の取引の近似と考えることができ, 現在の金融実務においても Bachelier モデル (ブラウン運動モデル) や Black-Scholes モデル (幾何ブラウン運動モデル) など連続時間のマーケットモデルを考えることが一般的である. また, これらのモデルにおいて, 最も基本的なオプションであるヨーロピアンコールオプションのヘッジは単純戦略では不可能であることも知られている. このようにオプションのヘッジに関する理論の展開のためにも投資戦略のクラスの拡張が求められる.

抽象的な設定における Kreps-Yan の定理

Kreps-Yan の定理 (定理 2.7) の一般形について述べる.

定理2.7では, Hahn-Banach 型の議論において汎弱位相を入れた $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ と $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の双対性を用いた. ここでは一般の $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ と $L^q(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ $(1\le p,q\le\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ について議論する (Kreps の論文 [24] ではより一般の vector lattice における双対 $\langle E,E'\rangle$ について議論している).

$1\le p,q\le\infty$ かつ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ なる (p,q) を固定し,

$$E=L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),\ E'=L^q(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \tag{2.9}$$

$$E_+=\{f\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\mid f\ge 0 \text{ a.s.}\},\ E_-=\{f\in L^p(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\mid f\le 0 \text{ a.s.}\} \tag{2.10}$$

と置く.

定理 2.8 (Kreps, 1981)**.** $\mathcal{C}\subset E$ を $\sigma(E,E')$ に関して閉な凸錐集合とし, $E_-\subset\mathcal{C}$ および $C\cap E_+=\{0\}$ を仮定する. このとき, $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q}$ で次の 3 条件を満たすものが存在する;

(i) $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$;

(ii) $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\in E'$;

(iii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]\le 0,\ \forall f\in\mathcal{C}$.

逆に, $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ で上の (i) および (ii) を満たすものが与えられたとき,

$$\widetilde{\mathcal{C}}=\{f\in E\mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]\le 0\} \tag{2.11}$$

は $\sigma(E,E')$ に関して閉な凸錐集合であり,

$$\widetilde{\mathcal{C}}\cap E_+=\{0\} \tag{2.12}$$

となる.

証明. 後半の主張は明らか. 前半の主張を示す.

$0<\delta\le 1$ に対し, E の凸部分集合 $B_\delta=\{f\in E\mid 0\le f\le 1,\ \mathbb{E}[f]\ge\delta\}$ を考える. Alaoglu の定理より B_δ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の部分集合として汎弱コンパクトである. $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ (汎弱位相) から E ($\sigma(E,E')$-位相) への自然な埋め込みは連続であるので, B_δ は $\sigma(E,E')$ に関してコンパクトである. また, 仮定より

$$\mathcal{C}\cap B_\delta=\phi \tag{2.13}$$

が成立する. したがって Hahn-Banach の分離定理 (閉凸とコンパクト凸の強分離) より, ある $g_\delta\in E'$ が存在し,

$$\sup_{f\in\mathcal{C}}\mathbb{E}[g_\delta f]<\inf_{h\in B_\delta}\mathbb{E}[g_\delta h] \tag{2.14}$$

が成立する. 仮定より $\mathcal{C}$ は錐かつ $0\in\mathcal{C}$ であるので, $\sup_{f\in\mathcal{C}}\mathbb{E}[g_\delta f]=0$, したがって $\inf_{h\in B_\delta}\mathbb{E}[g_\delta h]>0$ となる. また $E_-\subset\mathcal{C}$ より, 任意の $f\in E_+$ に対して $\mathbb{E}[g_\delta f]\ge 0$, ゆえに $g_\delta\ge 0$ a.s. となる. さらに, $1\in B_\delta$ より $\mathbb{E}[g_\delta]>0$ が従う. 正規化することにより $\mathbb{E}[g_\delta]=1$ としてよい.

今, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\delta_n = 2^{-n}$ を考え, 確率測度 $\mathbb{Q}_n \ll \mathbb{P}$ を $\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}} = g_{2^{-n}}$ により定義する. $\mathbb{P}(A) \geq 2^{-n}$ なる $A \in \mathcal{F}$ に対し, $\mathbb{1}_A$ は $B_{2^{-n}}$ の元であることに注意して,

$$\mathbb{Q}_n(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A g_{2^{-n}}] > 0 \tag{2.15}$$

となる. 今, 実数列 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$\lambda_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = 1,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \|g_{2^{-n}}\|_{E'} < \infty \tag{2.16}$$

となるように取る ($\|g_{2^{-n}}\|_{E'} \in [1,\infty)$ に注意して, $c = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n}}{\|g_{2^{-n}}\|_{E'}}$, $\lambda_n = \frac{2^{-n}}{c\|g_{2^{-n}}\|_{E'}}$ などと取ればよい). このとき確率測度 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ を

$$\mathbb{Q} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathbb{Q}_n \tag{2.17}$$

と定義すると, $\mathbb{Q}$ は定理の条件 $(i), (ii), (iii)$ を満たすことがわかる;

(i) $\mathbb{P}(A) > 0$ なる任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し $\mathbb{Q}(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathbb{Q}_n(A) > 0$ となることより, $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, すなわち $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ が従う.

(ii) $\|\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\|_{E'} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \|g_{2^{-n}}\|_{E'} < \infty$.

(iii) 任意の $f \in \mathcal{C}$ に対し, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathbb{E}[g_{2^{-n}} f] \leq 0$ となる.

□

3 No Free Lunch with Vanishing Risk

この節では, [8] を参考に, 有限次元マーケットモデルにおける最も一般的な形の数理ファイナンスの基本定理を証明する.

第 2 節の設定, すなわち一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の連続時間マーケットモデルを考える. 時間集合を $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ とし, フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ は通常の条件 (i.e. 右連続かつ $\mathcal{F}_0$ は零集合全体を含む) を満たすとする.

d 個の危険資産の割引価格過程 $S = (S_t)_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$-値 càdlàg 適合過程とする. このモデルは離散時間モデル $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ を含むことに注意する.

第 2.2 節で述べた通り,Kreps-Yan の定理 (定理 2.7) は Harrison-Pliska の数理ファイナンスの基本定理 (定理 1.9) の一般のマーケットモデルへの一般化であるが, (NFL) の定義における $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相に関する難点のため, そのままの形では経済学的な要請を満たさない. これを解決するために, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相をより強い位相 (理想的には一様収束位相) で置き換えた無裁定型条件 (すなわち (NFL) よりも若干弱い条件) を考える必要がある.

そこで F. Delbaen と W. Schachermayer は, 許容可能な投資戦略のクラスを連続取引を考慮した一般の可予測過程に拡張させ, (NFL) より若干弱い条件である No Free Lunch with Vanishing Risk 条件 $(NFLVR)$ を定義した.

この節では, 次の定理を証明することを目標とする (条件および記号の定義は後述).

定理 3.1 (Delbaen-Schachermayer, 1994)**.** 価格過程 S が有界なセミマルチンゲールのとき, 次が成立する;

$$(NFLVR) \iff \mathcal{M}^e(S) \neq \phi. \tag{3.1}$$

また, 価格過程 S が局所有界なセミマルチンゲールのとき, 次が成立する;

$$(NFLVR) \iff \mathcal{M}^e_{\mathrm{loc}}(S) \neq \phi. \tag{3.2}$$

一般のセミマルチンゲールについては次が成立する.

定理 3.2 (Delbaen-Schachermayer, 1998)**.** 価格過程 S がセミマルチンゲールのとき, 次が成立する;

$$(NFLVR) \iff \mathcal{M}^e_\sigma(S) \neq \phi. \tag{3.3}$$

投資家は, 各時刻において価格が変動する直前までの情報に基づき投資戦略を組む. このことから, 投資戦略のクラスとして可予測過程を要請することは自然であると言える. また, 価格過程をセミマルチンゲールと仮定することで, 一般の可予測過程を被積分過程とする確率積分の理論が展開できる. 逆に, 非常に弱い無裁定型条件の下, 価格過程のクラスはセミマルチンゲールに制限されることが知られており, 無裁定理論において価格過程をセミマルチンゲールとすることは自然な設定であることがわかる. 詳細は [1] 参照.

3.1 セミマルチンゲールと確率積分

この節では, [5], [8], [16], [27], [4] を参考に有限次元セミマルチンゲールに関するベクトル確率積分を定義し, その基本的性質をまとめる.

「buy-and-hold 戦略」は, ある時刻 $T_1 \in \mathbb{R}_+$ で証券を買い, その後時刻 $T_2 > T_1$ においてその証券を売るという最も単純な投資戦略である. この状況はすでにこれまでの議論においても現れている. ここで, 取引する時刻 T_1, T_2 はそれ以前の情報に依存して決まる確率的な時刻であると考えるのが自然である (例えば, 株価が下がれば買い, 上がれば売るというような戦略). そこで T_1, T_2 は停止時刻であると要請する. また, 時刻 T_1 における株式の取引量 f は, 当然 (確率的な) 時刻 T_1 までの情報のみに依存して決定されるであろう. つまり, f は $\mathcal{F}_{T_1}$-可測であると考えるのが自然である. このような buy-and-hold 戦略に従うとき, 証券価格 S の変動に伴った投資家の合計損益額は $(f, S_{T_2} - S_{T_1})$ となる. ここで述べた直観的要請を念頭に, 単純戦略を次のように定義する;

定義 3.3. 確率過程 $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ を考える ($H_0 = 0$ とする).

(i) ある有限個の停止時刻の増大列 $0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{m+1} < \infty$ および確率変数 $f_0, \ldots, f_{n-1}$ で各 f_k が $\mathcal{F}_{T_k}$-可測であるものが存在し,$H = \sum_{k=1}^m f_k \mathbb{1}_{\rrbracket T_k, T_{k+1} \rrbracket}$ と書けるとき, H を**単純戦略 (simple strategy)** と呼ぶ.

(ii) (i) において, さらに各 f_k が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$ の元として取れるとき, H を**有界単純戦略 (bounded simple strategy)** と呼ぶ.

注意 . 第 2 節において定義した「単純戦略」は, ここでいう「有界単純戦略」のことを指す.

1次元有界単純戦略全体の集合を $\mathcal{SI}$, d 次元有界単純戦略全体の集合を $\mathcal{SI}^d$ と書く. 割引価格過程 $S=(S_t)_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^d$-値 càdlàg 適合過程とする. このとき有界単純戦略 $H\in\mathcal{SI}^d$ による時刻 t までの累積割引損益額は

$$(H\cdot S)_t \overset{\text{def}}{=} \int_0^t H_u dS_u \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m}(f_k, S_{T_{k+1}\wedge t}-S_{T_k\wedge t}) \tag{3.1}$$

と書ける. また, 最終損益額 (ultimate gain) は (存在すれば)

$$(H\cdot S)_\infty \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty H_u dS_u \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m}(f_k, S_{T_{k+1}}-S_{T_k}) \tag{3.2}$$

と書ける.

このように, 有界単純戦略についての確率積分 $H\cdot S$ は有限時間の設定に沿って (各 $\omega\in\Omega$ に対し) 自然に定義できる. この確率積分の被積分過程のクラスを, 適当な極限操作により拡張することを考える.

3.1.1 準備

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とし, $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を通常の条件を満たすフィルトレーションとする. 左連続な適合過程により生成される $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上の σ-加法族 $\mathcal{P}$ を可予測 σ-加法族, càdlàg 適合過程により生成される $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上の σ-加法族 $\mathcal{O}$ をオプショナル σ-加法族と呼ぶ. $\Omega\times\mathbb{R}_+$ 上の写像として $\mathcal{P}$, $\mathcal{O}$ に可測な確率過程を, それぞれ可予測過程, オプショナル過程と呼ぶ.

補題 3.4. σ-加法族 $\mathcal{P}$ は次の集合族により生成される;

(*i*) $B\times\{0\}$, ただし $B\in\mathcal{F}_0$, および $B\times(s,t]$, ただし $0<s<t$ かつ $B\in\mathcal{F}_s$;

(*ii*) $B\times\{0\}$, ただし $B\in\mathcal{F}_0$, および $[\![0,\tau]\!]$, ただし τ は停止時刻.

一般に càdlàg な1次元確率過程 X に対し,

$$X_t^* \overset{\text{def}}{=} \sup_{s\leq t}|X_s|,\ t\in\mathbb{R}_+\cup\{\infty\} \tag{3.3}$$

と定義する. $(X_t^*)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は再び càdlàg 適合過程となることに注意する.

定義 3.5. 確率過程の列 $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が確率過程 X に u.c.p. (in probability uniformly on compact intervals) で収束するとは, 各 $t>0$ に対し $(X^n-X)_t^* \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ となることをいう. このとき $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} X$ と表す.

確率過程 M が局所的に一様可積分マルチンゲールとなるとき, M を局所マルチンゲールと呼ぶ. 1次元および d 次元局所マルチンゲール全体の集合をそれぞれ $\mathcal{L}$ および $\mathcal{L}^d$ と書く.
増加過程全体の集合を $\mathcal{V}^+$, 有界変動過程全体の集合を $\mathcal{V}$ と書く. また $\mathcal{A}^+=\{A\in\mathcal{V}\mid\mathbb{E}[A_\infty]<\infty\}$ を可積分増加過程の集合, $\mathcal{A}=\{A\in\mathcal{V}\mid\mathbb{E}[Var(A)_\infty]<\infty\}$ を可積分変動過程の集合とする. $\mathcal{A}^+_{\text{loc}}$, $\mathcal{A}_{\text{loc}}$, $\mathcal{A}^d_{\text{loc}}$ などを自然に定義する.

定義 3.6. d 次元 càdlàg 適合過程 S が $M \in \mathcal{L}^d$ および $A \in \mathcal{V}^d$ ($M_0 = A_0 = 0$) を用いて $S = S_0 + M + A$ と書けるとき, S を**セミマルチンゲール (semimartingale)** と呼ぶ. 1 次元セミマルチンゲール全体の集合を $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{P})$, d 次元セミマルチンゲール全体の集合を $\mathcal{S}^d = \mathcal{S}^d(\mathbb{P})$ と表す.

注意 . 確率測度 $\mathbb{P}$ および $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ を考える. このとき $\mathcal{S}(\mathbb{P}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ となる. 特に $\mathcal{S}$ は同値測度の変換により不変である.

セミマルチンゲールは Bichteler-Dellacherie の定理により good integrator として特徴づけられる.

定義 3.7. 1 次元 càdlàg 適合過程 X を考える. $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|H_t^n\|_{L^\infty} \to 0$ なる任意の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}$ に対し, 各 $t \in \mathbb{R}_+$ において $(H^n \cdot X)_t \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ となるとき, X を **good integrator** と呼ぶ.

次の補題はセミマルチンゲールと good integrator がともに局所的な概念であることを示す.

補題 3.8. X を 1 次元 càdlàg 適合過程とし, $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を停止時刻の列で $\mathbb{P}\{\tau_n = \infty\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ となるものとする.

(*i*) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し X^{τ_n} がセミマルチンゲールであるとき, X はセミマルチンゲールである.

(*ii*) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し X^{τ_n} が good integrator であるとき, X は good integrator である.

証明. (*i*) 部分列を考えることにより, $\mathbb{P}\{\tau_n < \infty\} \le 2^{-n}$ としてよい. このとき Borel-Cantelli の補題より $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{\tau_n < \infty\}) = 0$, すなわち a.s. $\omega \in \Omega$ に対しある $N(\omega) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n \ge N(\omega)$ に対し $\tau_n(\omega) = \infty$ となる. したがって各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sigma_n = \inf\{\tau_k \mid k \ge n\} \tag{3.4}$$

と置くと, $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は停止時刻の増大列であり, a.s. $\omega \in \Omega$ および $\forall n \ge N(\omega)$ に対し $\sigma_n(\omega) = \infty$, 特に $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s. となる. また $X^{\sigma_n} = (X^{\tau_n})^{\sigma_n}$ はセミマルチンゲールである. したがって各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $M^n \in \mathcal{L}$ および $A^n \in \mathcal{V}$ ($M_0^n = A_0^n = 0$) が存在し,

$$X^{\sigma_n} = X_0 + M^n + A^n \tag{3.5}$$

が成立する. $X = \sum_{n=1}^\infty X^{\sigma_n} \mathbb{1}_{[\![\sigma_{n-1},\sigma_n[\![}$ ($\sigma_0 = 0$ とする) に注意して,

$$X = X_0 + \sum_{n=1}^\infty M^n \mathbb{1}_{[\![\sigma_{n-1},\sigma_n[\![} + (\text{有界変動過程}) \tag{3.6}$$

と書ける. さらに

$$M^n \mathbb{1}_{[\![\sigma_{n-1},\sigma_n[\![} = (M^n)^{\sigma_n} - M^n_{\sigma_n}\mathbb{1}_{[\![\sigma_n,\infty[\![} - (M^n)^{\sigma_{n-1}} + M^n_{\sigma_{n-1}}\mathbb{1}_{[\![\sigma_{n-1},\infty[\![} \tag{3.7}$$

および a.s. $\omega \in \Omega$ で $\forall n \ge N(\omega)$ に対し $\sigma_n(\omega) = \infty$ となることに注意して

$$X = X_0 + \sum_{n=1}^\infty ((M^n)^{\sigma_n} - (M^n)^{\sigma_{n-1}}) + (\text{有界変動過程}) \tag{3.8}$$

となる. 右辺第二項は a.s. で有限和であり, 明らかに局所マルチンゲールとなる. したがって X はセミマルチンゲールである.

(ii) $t \in \mathbb{R}_+$ を任意に取り固定する. $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|H_t^k\|_{L^\infty} \overset{k\to\infty}{\to} 0$ なる列 $(H^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}$ および $c > 0$ を任意に取ると, 各 $n, k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{|(H^k \cdot X)_t| \geq c\} \leq \mathbb{P}\{|(H^k \cdot X^{\tau_n})_t| \geq c\} + \mathbb{P}\{\tau_n \leq t\} \tag{3.9}$$

が成立する. 今, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $\mathbb{P}\{\tau_n \leq t\} \leq \epsilon/2$ となる. この $n \in \mathbb{N}$ を固定すると, X^{τ_n} が good integrator であることより, 十分大きい $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{|(H^k \cdot X^{\tau_n})_t| \geq c\} \leq \epsilon/2$, すなわち

$$\mathbb{P}\{|(H^k \cdot X)_t| \geq c\} \leq \epsilon \tag{3.10}$$

となる. ゆえに X は good integrator である.

□

定理 3.9 (Bichteler-Dellacherie)**.** 1 次元 càdlàg 適合過程 X に対し, 次は同値;

(i) X はセミマルチンゲール;

(ii) X は good integrator.

無裁定理論と関連付けた Bichteler-Dellacherie の定理の証明は [1] 参照.

次に, セミマルチンゲールの二次変分を定義する. 列 $\Delta^n = \{0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \dots\}$ で, 各 τ_m^n は停止時刻であり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $m \to \infty$ で $\tau_m^n \to \infty$ a.s. となり, かつ任意の $t \geq 0$ に対し

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} (\tau_{m+1}^n \wedge t - \tau_m^n \wedge t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \ (n \to \infty) \tag{3.11}$$

となるものを, Riemannian sequence と呼ぶ.

命題 3.10. $X, Y \in \mathcal{S}$ とする. 各 Riemannian sequence $\Delta^n = \{0 = \tau_0^n < \tau_1^n < \dots\}$ に対し確率過程

$$Q_t^{X,Y}(\Delta^n) = \sum_{m=0}^{\infty} (X_{\tau_{m+1}^n \wedge t} - X_{\tau_m^n \wedge t})(Y_{\tau_{m+1}^n \wedge t} - Y_{\tau_m^n \wedge t}) \tag{3.12}$$

を考える. このとき $\{Q^{X,Y}(\Delta^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to \infty$ で Riemannian sequence の取り方に依らないある確率過程 $[X, Y] \in \mathcal{V}$ に u.c.p. 収束する.

定義 3.11. 上の命題の $[X, Y]$ を, $X, Y \in \mathcal{S}$ の二次共変分 (quadratic covariation) と呼ぶ. また $[X, X]$ を X の二次変分と呼び, $[X]$ とも表す.

命題 3.12. $X, Y \in \mathcal{S}$ とし, X^c, Y^c をそれぞれ X, Y の連続マルチンゲールパート (定義は [16] を参照) とする. このとき

$$[X, Y] = \sum_{s\leq\cdot} \Delta X_s \Delta Y_s + [X^c, Y^c] \tag{3.13}$$

が成立する.

3.1.2 局所マルチンゲールに関する確率積分

局所マルチンゲールに関する確率積分を定義する.

命題 3.13. $M \in \mathcal{L}$ に対し $[M]^{1/2} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$ となる. また, $M, N \in \mathcal{L}$ に対し $[M, N] \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ となる.

$\mathcal{H}^1$-マルチンゲールの空間

$$\mathcal{H}^1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{M \in \mathcal{L} \mid \mathbb{E}[M_\infty^*] < \infty\} \tag{3.14}$$

は, ノルム $\|M\|_{\mathcal{H}^1} = \mathbb{E}[M_\infty^*]$ により Banach 空間となる. $M^n, M \in \mathcal{H}^1$ に対し, $\mathcal{H}^1$ における収束を $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{H}^1} M$ と表す. このとき明らかに $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} M$ が成立する. すなわち, $\mathcal{H}^1$ の位相は u.c.p. 収束の位相よりも強い. また, 任意の $M \in \mathcal{H}^1$ は一様可積分マルチンゲールである. 特に, a.s. で極限 $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ が存在する.

命題 3.14 (Burkholder-Davis-Gundy (BDG) 不等式, $p = 1$)**.** ある定数 $0 < c < C$ が存在し, 任意の $M \in \mathcal{H}^1$ に対し

$$c\mathbb{E}[[M]_\infty^{1/2}] \le \mathbb{E}[M_\infty^*] \le C\mathbb{E}[[M]_\infty^{1/2}] \tag{3.15}$$

が成立する.

系 3.15. 任意の局所マルチンゲールは, 局所的に $\mathcal{H}^1$-マルチンゲールである.

$M \in \mathcal{L}^d$ とする. このときある $C \in \mathcal{V}^+$ およびオプショナル過程 $\pi^{i,j}$, $i, j = 1, \cdots, d$ が存在し,

$$[M^i, M^j] = \int_0^\cdot \pi_s^{i,j} dC_s \ \forall i, j = 1, \dots, d \tag{3.16}$$

と書ける. さらに, 各 t, ω に対し行列 $\pi_t(\omega) = (\pi_t^{i,j}(\omega))_{i,j}$ が非負対称行列となるように取れる [16]. 特に, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega, t \ge 0$ に対し

$$\sum_{i,j=1}^d \lambda^i \pi_t^{i,j}(\omega)\lambda^j = \langle \pi_t(\omega)\lambda, \lambda\rangle \le \|\lambda\|^2 \mathrm{trace}(\pi_t(\omega)) = \|\lambda\|^2 \sum_{i=1}^d \pi_t^{i,i}(\omega) \tag{3.17}$$

が成立する.

$$\dot{L}^1(M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ H = (H^1, \dots, H^d) \mid H \text{ は可予測, かつ } \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{i,j} H_s^j dC_s\right)^{1/2}\right] < \infty \right\} \tag{3.18}$$

と置く. $H, K \in \dot{L}^1(M)$ に対し

$$H \sim K \ \stackrel{\mathrm{def}}{\iff} \ \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^d (H_s^i - K_s^i)\pi_s^{i,j}(H_s^j - K_s^j) dC_s = 0 \text{ a.s.} \tag{3.19}$$

とし, $L^1(M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dot{L}^1(M)/\sim$ と定義する.

補題 3.16. (*i*) $L^1(M)$ はノルム

$$\|H\|_{L^1(M)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{i,j} H_s^j dC_s\right)^{1/2}\right] \tag{3.20}$$

により Banach 空間となる.

(*ii*) $\mathcal{SI}^d \cap L^1(M)$ は $L^1(M)$ で稠密である.

注意 . 明らかに, $L^1(M)$ および $\|\cdot\|_{L^1(M)}$ は C および $\pi^{i,j}$ の取り方に依らない.

$H = \sum_{k=1}^m f_k \mathbb{1}_{]\!]\tau_k,\tau_{k+1}]\!]} \in \mathcal{SI}^d$ に対し, H の M に関する確率積分を

$$(H\cdot M)_t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m (f_k, M_{\tau_{k+1}\wedge t} - M_{\tau_k\wedge t}) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^m f_k^i (M^i_{\tau_{k+1}\wedge t} - M^i_{\tau_k\wedge t}) \tag{3.21}$$

と定義する. このとき $H\cdot M \in \mathcal{L}$ であり,

$$[H\cdot M] = \int_0^\cdot \sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{i,j} H_s^j dC_s \tag{3.22}$$

が成立する.

$H \in L^1(M)$ とする. このとき近似列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}^d \cap L^1(M)$ が存在し, $H^n \stackrel{L^1(M)}{\longrightarrow} H$ となる. 式 (3.22) に注意して, BDG 不等式 (命題 3.14) より $(H^n\cdot M)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}^1$ の Cauchy 列, したがって $\mathcal{H}^1$ において極限が存在する. 明らかに, この極限は近似列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方に依らない.

定義 3.17. $H \in L^1(M)$ に対し, H の M に関する確率積分を

$$H\cdot M \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}^1\text{-}\lim_{n\to\infty} H^n \cdot M \tag{3.23}$$

により定義する. ここで, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}^d \cap L^1(M)$ は H の $L^1(M)$ における近似列である.

局所化の議論により, 被積分過程のクラスをさらに拡張する.

$$L^1_{\text{loc}}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ H = (H^1,\dots,H^d) \mid H \text{ は可予測, かつ } \left(\int_0^\cdot \sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{i,j} H_s^j dC_s\right)^{1/2} \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}} \right\} \tag{3.24}$$

と置く. $H \in L^1_{\text{loc}}(M)$ とすると, ある停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{\tau_n} \sum_{i,j=1}^d H_s^i \pi_s^{i,j} H_s^j dC_s\right)^{1/2}\right] < \infty, \tag{3.25}$$

すなわち $H\mathbb{1}_{[\![0,\tau_n]\!]} \in L^1(M)$ となる. さらに, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$((H\mathbb{1}_{[\![0,\tau_{n+1}]\!]})\cdot M)^{\tau_n} = (H\mathbb{1}_{[\![0,\tau_n]\!]})\cdot M \tag{3.26}$$

が成立する. したがって, 一意的に確率過程 $H\cdot M$ を

$$(H\cdot M)^{\tau_n} \stackrel{\text{def}}{=} (H\mathbb{1}_{[\![0,\tau_n]\!]})\cdot M, \quad n\in\mathbb{N} \tag{3.27}$$

と定義できる. また, 明らかに $H\cdot M$ は局所化停止時刻の列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の取り方に依らない.

定義 3.18. $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に対し, 式 (3.27) で定義される $H \cdot M$ を, H の M に関する確率積分と呼ぶ.

明らかに, $H \cdot M \in \mathcal{L}$ となる.

注意 . 任意の $M \in \mathcal{L}^d$ に対し, $L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ は局所有界な d 次元可予測過程全体を含む.

局所マルチンゲールに関する確率積分の基本的な性質は次の通りである. 証明は [4] を参照.

補題 3.19. *(i)* $M \in \mathcal{L}^d$, $H^1, H^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ かつ

$$(\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2) \cdot M = \alpha_1 (H^1 \cdot M) + \alpha_2 (H^2 \cdot M) \tag{3.28}$$

が成立する.

(ii) $M^1, M^2 \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M^1) \cap L^1_{\mathrm{loc}}(M^2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(\alpha_1 M^1 + \alpha_2 M^2)$ かつ

$$H \cdot (\alpha_1 M^1 + \alpha_2 M^2) = \alpha_1 (H \cdot M^1) + \alpha_2 (H \cdot M^2) \tag{3.29}$$

が成立する.

(iii) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に対し, $H \cdot M \in \mathcal{L}$ かつ

$$[H \cdot M] = \int_0^\cdot \sum_{i,j=1}^d H^i_s \pi^{i,j}_s H^j_s dC_s \tag{3.30}$$

が成立する.

(iv) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$, および停止時刻 τ に対し,

$$(H \cdot M)^\tau = H \cdot M^\tau = (H \mathbb{1}_{[\![0,\tau]\!]}) \cdot M \tag{3.31}$$

が成立する.

(v) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ とし, K を 1 次元有界可予測過程とする. このとき

$$K \in L^1_{\mathrm{loc}}(H \cdot M) \iff KH \in L^1_{\mathrm{loc}}(M) \tag{3.32}$$

となる. さらにこのとき

$$K \cdot (H \cdot M) = (KH) \cdot M \tag{3.33}$$

が成立する.

(vi) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ に対し,

$$\Delta(H \cdot M) = (H, \Delta M) \tag{3.34}$$

が成立する.

(vii) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1(M)$ に対し, $H^n = H \mathbb{1}_{\{\|H\| \le n\}}$ と置いたとき,

$$H^n \cdot M \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{H}^1} H \cdot M \tag{3.35}$$

が成立する.

3.1.3 有界変動過程に関する確率積分

$A \in \mathcal{V}^d$ とする. このときある $C \in \mathcal{V}^+$ およびオプショナル過程 a^i, $i = 1, \cdots, d$ が存在し,

$$A^i = \int_0^\cdot a_s^i dC_s,\ i = 1, \ldots, d \tag{3.36}$$

と書ける.

$$L_{\mathrm{var}}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ H = (H^1, \ldots, H^d) \mid H \text{ は可予測, かつ各 } t \geq 0 \text{ に対し } \int_0^t \left| \sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i \right| dC_s < \infty \text{ a.s.} \right\} \tag{3.37}$$

と置く. 明らかに, $L_{\mathrm{var}}(A)$ は C および $a^1, \ldots, a^d$ の取り方に依らない.

定義 3.20. $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ に対し, H の A に対する確率積分を, 道ごとの Lebesgue-Stieltjes 積分

$$H \cdot A \overset{\mathrm{def}}{=} \int_0^\cdot \sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i dC_s \quad \text{a.s.} \tag{3.38}$$

により定義する.

明らかに $H \cdot A \in \mathcal{V}$ となる.

注意 . 任意の $A \in \mathcal{V}^d$ に対し, $L_{\mathrm{var}}(A)$ は局所有界な d 次元可予測過程全体を含む.

補題 3.21. (*i*) $A \in \mathcal{V}^d$, $H^1, H^2 \in L_{\mathrm{var}}(A)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2 \in L_{\mathrm{var}}(A)$ かつ

$$(\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2) \cdot A = \alpha_1 (H^1 \cdot A) + \alpha_2 (H^2 \cdot A) \tag{3.39}$$

が成立する.

(*ii*) $A^1, A^2 \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A^1) \cap L_{\mathrm{var}}(A^2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $H \in L_{\mathrm{var}}(\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2)$ かつ

$$H \cdot (\alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2) = \alpha_1 (H \cdot A^1) + \alpha_2 (H \cdot A^2) \tag{3.40}$$

が成立する.

(*iii*) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ に対し, $H \cdot A \in \mathcal{V}$ かつ

$$\mathrm{Var}(H \cdot A) = \int_0^\cdot \left| \sum_{i=1}^d H_s^i a_s^i \right| dC_s \tag{3.41}$$

が成立する.

(*iv*) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$, および停止時刻 τ に対し,

$$(H \cdot A)^\tau = H \cdot A^\tau = (H \mathbb{1}_{[\![0,\tau]\!]}) \cdot A \tag{3.42}$$

が成立する.

(v) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ とし, K を 1 次元有界可予測過程とする. このとき

$$K \in L_{\mathrm{var}}(H \cdot A) \iff KH \in L_{\mathrm{var}}(A) \tag{3.43}$$

となる. さらにこのとき

$$K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A \tag{3.44}$$

が成立する.

(vi) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ に対し,

$$\Delta(H \cdot A) = (H, \Delta A) \tag{3.45}$$

が成立する.

(vii) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ に対し, $H^n = H\mathbb{1}_{\{\|H\| \le n\}}$ と置いたとき,

$$H^n \cdot A \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} H \cdot A \tag{3.46}$$

が成立する.

3.1.4 セミマルチンゲールに関する確率積分

次に, d 次元セミマルチンゲール $S \in \mathcal{S}^d$ に関する確率積分を定義する. ここでは必要に応じて $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ について第 3.1.2 節で定義した局所マルチンゲールに関する確率積分を $(\mathcal{M})H \cdot M$ と書き, $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ について第 3.1.3 節で定義した有界変動過程に関する確率積分 (Lebesgue-Stieltjes 積分) を $(\mathcal{LS})H \cdot A$ と書く.

補題 3.22. $X \in \mathcal{L}^d \cap \mathcal{V}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(X) \cap L_{\mathrm{var}}(X)$ に対し,

$$(\mathcal{M})H \cdot X = (\mathcal{LS})H \cdot X \tag{3.47}$$

が成立する.

証明. 局所化により, $H \in L^1(X)$, $\mathbb{E}[[X^i]_\infty^{1/2}] < \infty$, $i = 1, \ldots, d$ と仮定して良い (局所マルチンゲールは局所的に $\mathcal{H}^1$-マルチンゲールであることに注意する).

$H = \lambda\mathbb{1}_{B\times\{0\}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{F}_0$) および $H = \lambda\mathbb{1}_{B\times(s,t]}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^d$, $0 < s < t$, $B \in \mathcal{F}_s$) の場合は明らかに主張が成立する. したがって, 補題 3.4 に注意して, 単調族定理より $H = \lambda\mathbb{1}_D$ ($D \in \mathcal{P}$) に対して主張が成立する. さらに, 確率積分の線形性より, $\sum_k \lambda_k \mathbb{1}_{D_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}^d$, $D_k \in \mathcal{P}$) の形の有限和で表せる H に対しても主張が成立する.

H を d 次元有界可予測過程とする. このとき $\sum_k \lambda_k \mathbb{1}_{D_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{R}^d$, $D_k \in \mathcal{P}$) の形の有限和で表せる列 H^n, $n \in \mathbb{N}$ で, H に $\Omega \times \mathbb{R}_+$ 上一様収束するものが取れる. このとき

$$(\mathcal{LS})H^n \cdot X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} (\mathcal{LS})H \cdot X, \tag{3.48}$$

$$(\mathcal{M})H^n \cdot X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{H}^1} (\mathcal{M})H \cdot X, \tag{3.49}$$

したがって特に

$$(\mathcal{M})H^n \cdot X \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} (\mathcal{M})H \cdot X \tag{3.50}$$

となる. 前半の議論より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathcal{LS})H^n \cdot X = (\mathcal{M})H^n \cdot X$ が成立するので, H に対しても $(\mathcal{LS})H \cdot X = (\mathcal{M})H \cdot X$ が成立する.

最後に, $H \in L^1(X) \cap L_{\mathrm{var}}(X)$ について, $H^n = H\mathbb{1}_{\{\|H\| \le n\}}$ で近似することで, 上と同様の議論により $(\mathcal{LS})H \cdot X = (\mathcal{M})H \cdot X$ が成立する. □

今, $S \in \mathcal{S}^d$ を考える. S は $M \in \mathcal{L}^d$ および $A \in \mathcal{V}$ $(M_0 = A_0 = 0)$ を用いて $S = S_0 + M + A$ と書ける (この分解は一意的ではないことに注意する). 任意の局所有界な d 次元可予測過程 H は $L^1_{\mathrm{loc}}(M) \cap L_{\mathrm{var}}(A)$ の元であることに注意して, H の S に関する確率積分を

$$H \cdot S \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{S})H \cdot S \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathcal{M})H \cdot M + (\mathcal{LS})H \cdot A \tag{3.51}$$

により定義する. 補題 3.22 より, この定義は S の分解に依らず, well-defined である.

適当な位相での極限操作により, セミマルチンゲールに関する確率積分の被積分過程を局所有界可予測過程よりも広いクラスに拡張することを考える.

1 次元 càdlàg 確率過程の空間における u.c.p. 収束の位相は, 準ノルム

$$X \mapsto \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[X] \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m}\mathbb{E}[X^*_m \wedge 1] \tag{3.52}$$

により定まることに注意する. また, u.c.p. 位相より強い一様確率収束の位相 (u.p. 位相) を定める準ノルムを次で与える;

$$X \mapsto \mathbb{D}_{\mathrm{up}}[X] \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{E}[X^*_\infty \wedge 1]. \tag{3.53}$$

確率積分を確率過程の空間における線形写像とみなすことにより, 自然に $\mathcal{S}$ の位相が定義できる.

定義 3.23. 1 次元セミマルチンゲール全体の集合 $\mathcal{S}$ に対し, 準ノルム

$$S \mapsto \mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S] \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H \cdot S] \mid H \text{ は } |H| \le 1 \text{ なる 1 次元可予測過程 }\} \tag{3.54}$$

により定まる位相を **Émery 位相 (セミマルチンゲール位相)** と呼ぶ. また, 準ノルム

$$S \mapsto \mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[S] \overset{\mathrm{def}}{=} \sup\{\mathbb{D}_{\mathrm{up}}[H \cdot S] \mid H \text{ は } |H| \le 1 \text{ なる 1 次元可予測過程 }\} \tag{3.55}$$

により定まる位相を**強 Émery 位相 (強セミマルチンゲール位相)** と呼ぶ. Émery 位相, 強 Émer 位相による収束をそれぞれ $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S$, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} S$ と表す.

注意 . (i) $\mathcal{S}$ は Émery 位相により線形位相空間となる.

(ii) $\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}$, $\mathbb{D}_{\mathrm{up}}$, $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}$, および $\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}$ は正同次性を持たないためノルムではない. しかし, 関数 $d_{\mathrm{ucp}}(X, Y) = \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[X - Y]$ などはそれぞれの空間において平行移動不変な距離関数を定める.

(iii) 任意の $\lambda > 1$ に対し, $\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[\lambda X] \le \lambda \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[X]$ および

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[\lambda S] = \sup\{\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H \cdot S] \mid H \text{ は } |H| \le \lambda \text{なる 1 次元可予測過程 }\} \le \lambda \mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S] \tag{3.56}$$

が成立する. u.p. 位相および強 Émery 位相についても同様の性質が成立する.

(*iv*) 強 Émery 位相は明らかに Émery 位相より強い位相を定める. この二つの位相の関係は, 一様収束と広義一様収束のそれと類似している. 強 Émery 位相は一般的な概念ではないが, 後に示す Delbaen-Schachermayer の定理の証明においてはむしろ強 Émery 位相が本質的に用いられる.

<u>Émery 位相の性質</u>

補題 3.24. $S \in \mathcal{S}$ に対し,

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S] = \sup\{\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H \cdot S] \mid H \in \mathcal{SI},\ |H| \leq 1\} \tag{3.57}$$

が成立する.

証明. 右辺を $\widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{S}}[S]$ と書く. 明らかに $\mathbb{D}_{\mathcal{S}} \geq \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{S}}[S]$ が成立する. 逆の不等号を示す. $\epsilon > 0$ を任意に取る. このとき $|H| \leq 1$ なる可予測過程 H が存在し,

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S] \leq \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H \cdot S] + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.58}$$

が成立する. さらにこの H に対し, $|H^n| \leq 1$ なる $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}$ で $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|H^n_t - H_t\|_{L^\infty} \overset{n\to\infty}{\to} 0$ なるものが存在する. このとき, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[(H^n - H)\cdot S] \leq \epsilon/2$ が成立する. したがって

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}(S) \leq \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}(H^n \cdot S) + \mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}((H - H^n)\cdot S) + \frac{\epsilon}{2} \leq \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{S}}(S) + \epsilon \tag{3.59}$$

となる. $\epsilon > 0$ は任意だったので, $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}(S) \leq \widetilde{\mathbb{D}}_{\mathcal{S}}(S)$ が成立する. □

補題 3.25. $S^n, S \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次は同値;

(*i*) $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S$;

(*ii*) $|H^n| \leq 1$ なる任意の 1 次元可予測過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し

$$H^n \cdot (S^n - S) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} 0 \tag{3.60}$$

が成立する.

証明. $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S$ と仮定する. このとき (*ii*) の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し

$$\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H^n \cdot (S^n - S)] \leq \mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S^n - S] \to 0 \tag{3.61}$$

となる.

逆に, ある $\epsilon > 0$ が存在し, 無限個の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[S^n - S] \geq \epsilon$ となると仮定する. このとき, このような n に対して $|H^n| \leq 1$ なる 1 次元可予測過程 H^n が存在し,

$$\mathbb{D}_{\mathrm{ucp}}[H^n \cdot (S^n - S)] \geq \epsilon/2 \tag{3.62}$$

となる. したがってこのとき (*ii*) は成立しない. □

同様に次が成立する.

補題 3.26. $S^n, S \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 次は同値;

(i) $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} S$;

(ii) $|H^n| \leq 1$ なる任意の 1 次元可予測過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し

$$H^n \cdot (S^n - S) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{up}} 0 \tag{3.63}$$

が成立する.

補題 3.27. (i) $M^n \in \mathcal{H}^1$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{H}^1} 0$ となるとき, $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0$ が成立する. したがって $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$ が成立する.

(ii) $A^n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 各 $t \in \mathbb{R}_+$ について $\mathrm{Var}(A^n)_t \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ となるとき, $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$ が成立する.

(iii) $A^n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{Var}(A^n)_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ となるとき, $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0$ が成立する.

(iv) $S^n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$ となるとき, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{ucp}} 0$ が成立する.

(v) $S^n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0$ となるとき, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{up}} 0$ が成立する.

証明. (i) $|H^n| \leq 1$ なる任意の 1 次元可予測過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, BDG 不等式より

$$\mathbb{E}[(H^n{\cdot}M^n)^*_\infty] \leq C\mathbb{E}[[H^n{\cdot}M^n]^{1/2}_\infty] = C\mathbb{E}[((|H^n|^2){\cdot}[M^n])^{1/2}_\infty] \leq C\mathbb{E}[[M^n]^{1/2}_\infty] \tag{3.64}$$

が成立する. 仮定より最右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束する. したがって特に $H^n{\cdot}M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{up}} 0$ となり, 補題 3.25 より $M^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0$ となる.

(ii) $|H^n| \leq 1$ なる任意の 1 次元可予測過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ および $t \in \mathbb{R}_+$ に対し

$$(H^n \cdot A^n)^*_t \leq (|H^n| \cdot \mathrm{Var}(A^n))_t \leq \mathrm{Var}(A^n)_t \tag{3.65}$$

となる. したがって仮定および補題 3.25 より, $A^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$ となる.

(iii) (ii) と同様.

(iv) 補題 3.25(ii) において $H^n \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$ を考えればよい.

(v) (iv) と同様.

□

補題 3.28. (i) $S^n, S \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. 停止時刻の増大列 $(\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$ で, $\tau_m \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$(S^n)^{\tau_m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S^{\tau_m} \tag{3.66}$$

となるものが存在するとき, $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S$ が成立する.

(ii) X^n, X, $n \in \mathbb{N}$ を 1 次元 càdlàg 確率過程とする. 停止時刻の増大列 τ_m, $m \in \mathbb{N}$ で, $\tau_m \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$(X^n)^{\tau_m} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} X^{\tau_m} \tag{3.67}$$

となるものが存在するとき, $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} X$ が成立する.

証明. (i) のみ示す. (ii) についても同様である. $|H^n| \le 1$ なる 1 次元可予測過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ および $\epsilon > 0$ を任意に取る. $t > 0$ および $\delta > 0$ を固定する. 仮定より, ある $m \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{\tau_m < t\} < \epsilon$ が成立する. この m に対し

$$\mathbb{P}\{(H^n \cdot (S^n - S))^*_t > \delta\} \le \mathbb{P}\{(H^n \cdot (S^n - S)^{\tau_m})^*_t > \delta\} + \epsilon \tag{3.68}$$

となるが, 仮定 $(S^n)^{\tau_m} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S^{\tau_m}$ および補題 3.25 より, 右辺第一項は十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $< \epsilon$ となる. したがって $H^n \cdot (S^n - S) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} 0$ となり, 再び補題 3.25 より $S^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} S$ となる. □

補題 3.29. $\mathcal{S}$ は Émery 位相により完備距離空間となる.

証明. $\mathcal{S}$ の Émery 位相に関する Cauchy 列 $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. このとき補題3.27 より $\{X^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はu.c.p. 位相でCauchy 列となる. したがってある càdlàg 適合過程 X が存在し, $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} X$ となる. さらに, $|H| \le 1$ なる可予測過程 H について一様に $H \cdot X^n$ は収束する. この極限を $I(H, X)$ と置く. $H \in \mathcal{SI}$ のとき, 明らかに $I(H, X) = H \cdot X$ が成立する. X が good integrator であることを示す (Bichteler-Dellacherie の定理 (定理 3.9)).

$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|H^n_t\|_{L^\infty} \to 0$ なる任意の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SI}$ を取る. $|H^k| \le 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ と仮定してよい. このとき任意の $k, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X] = \mathbb{D}_{\text{ucp}}[I(H^k, X)] \le \mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X^n] + \mathbb{D}_{\text{ucp}}[I(H^k, X) - H^k \cdot X^n] \tag{3.69}$$

となる. $\epsilon > 0$ を任意に取ったとき, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{D}_{\text{ucp}}[I(H^k, X) - H^k \cdot X^n] \le \epsilon/2, \tag{3.70}$$

すなわち

$$\mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X] \le \mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X^n] + \epsilon/2 \tag{3.71}$$

となる. 今, $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \|H^n_t\|_{L^\infty} \to 0$ より, 十分大きい $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X^n] \le \epsilon/2$, したがって

$$\mathbb{D}_{\text{ucp}}[H^k \cdot X] \le \epsilon \tag{3.72}$$

となる. ゆえに X は good integrator であり, Bichteler-Dellacherie の定理よりセミマルチンゲールとなる. 補題 3.24 に注意して $X^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} X$ となるので, $\mathcal{S}$ が Émery 位相に関して完備距離空間であることが示せた. □

補題 3.30. 二つの確率測度 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ を考える (このとき $\mathcal{S}(\mathbb{P}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ となる). このとき列 $(S^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{P})$ が $S \in \mathcal{S}(\mathbb{P})$ に $\mathbb{P}$ に関する Émery 位相で収束するなら, $(S^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ は $S \in \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ に $\mathbb{Q}$ に関する Émery 位相で収束する.

証明. 自然な埋め込み $\phi : \mathcal{S}(\mathbb{P}) \ni S \mapsto S \in \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ を考える. ただし $\mathcal{S}(\mathbb{P})$ および $\mathcal{S}(\mathbb{Q})$ はそれぞれの測度に対応する Émery 位相による位相線形空間とみなす. 補題 3.29 より, ϕ のグラフは $\mathcal{S}(\mathbb{P}) \times \mathcal{S}(\mathbb{Q})$ で閉である. したがって閉グラフ定理より ϕ は連続となり, 主張が従う. $\square$

Émery 位相による被積分過程の拡張

$S \in \mathcal{S}^d$ に関する確率積分を, 局所有界可予測過程よりも広いクラスの被積分過程に拡張する.

定義 3.31. $S \in \mathcal{S}^d$ とする. d 次元可予測過程 H に対し, $\{(H\mathbb{1}_{\{\|H\| \le n\}}) \cdot S\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ が Émery 位相で Cauchy 列となるとき, H は **S-可積分**であると言い, $H \in L(S)$ と表す. またこの極限セミマルチンゲールを $H \cdot S$ と書き (補題 3.29 より $\mathcal{S}$ は完備距離空間であることに注意), H の S に関する確率積分と呼ぶ.

必要に応じて, $S \in \mathcal{S}^d$ に関する $H \in L(\mathcal{S})$ の上の定義の意味での確率積分 $H \cdot S$ を $(\mathcal{S})H \cdot S$ と書く. 以下の基本性質の証明は省略する.

補題 3.32. (i) $S \in \mathcal{S}^d$, $H^1, H^2 \in L(S)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2 \in L(S)$ かつ

$$(\alpha_1 H^1 + \alpha_2 H^2) \cdot S = \alpha_1 (H^1 \cdot S) + \alpha_2 (H^2 \cdot S) \tag{3.73}$$

が成立する.

(ii) $S^1, S^2 \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(S^1) \cap L(S^2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ に対し, $H \in L(\alpha_1 S^1 + \alpha_2 S^2)$ かつ

$$H \cdot (\alpha_1 S^1 + \alpha_2 S^2) = \alpha_1 (H \cdot S^1) + \alpha_2 (H \cdot S^2) \tag{3.74}$$

が成立する.

(iii) $S \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(S)$, および停止時刻 τ に対し,

$$(H \cdot S)^\tau = H \cdot S^\tau = (H\mathbb{1}_{[\![0,\tau]\!]}) \cdot S \tag{3.75}$$

が成立する.

(iv) $S \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(S)$, および $D \in \mathcal{P}$ に対し,

$$\mathbb{1}_D \cdot (H \cdot S) = (\mathbb{1}_D H) \cdot S \tag{3.76}$$

が成立する.

(v) $S \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(S)$ に対し,

$$\Delta(H \cdot S) = (H, \Delta S) \tag{3.77}$$

が成立する.

補題 3.33. $S \in \mathcal{S}^d$ に対し, $L_{\mathrm{loc}}(S) = L(S)$ が成立する. すなわち d 次元可予測過程 H に対し停止時刻の増大列 $(\tau_m)_{m \in \mathbb{N}}$ で $\tau_m \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $m \in \mathbb{N}$ について $H^{\tau_m} \in L(S)$ となるものが存在するとき, $H \in L(S)$ となる.

証明. $H^m = H^{\tau_m}$ と置く. 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $(H^{m+1} \cdot S)^{\tau_m} = H^m \cdot S$ となることに注意して, 1 次元 càdlàg 適合過程 $I(H,S)$ を

$$I(H,S)^{\tau_m} \stackrel{\text{def}}{=} H^m \cdot S,\ m \in \mathbb{N} \tag{3.78}$$

と定義できる. 補題 3.8 より, $I(H,S) \in \mathcal{S}$ である. さらに, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対し

$$((H\mathbb{1}_{\{\|H\|\le n\}}) \cdot S)^{\tau_m} = (H^m \mathbb{1}_{\{\|H^m\|\le n\}}) \cdot S) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} H^m \cdot S = I(H,S)^{\tau_m} \tag{3.79}$$

となるため, 補題 3.28 より

$$(H\mathbb{1}_{\{\|H\|\le n\}}) \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} I(H,S) \tag{3.80}$$

となる. 特に $H \in L(S)$ である. □

次の補題において, 確率測度 $\mathbb{P}$ への依存性を強調するために $\mathcal{S}^d(\mathbb{P})$, $L(S;\mathbb{P})$, $(\mathbb{P})H \cdot S$ などの記号を用いる.

補題 3.34. $S \in \mathcal{S}^d(\mathbb{P})$, $H \in L(S;\mathbb{P})$ とし, 確率測度 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ を考える. このとき $S \in \mathcal{S}^d(\mathbb{Q})$, $H \in L(S;\mathbb{Q})$ かつ

$$(\mathbb{P})H \cdot S = (\mathbb{Q})H \cdot S,\ \mathbb{Q}\text{-a.s.} \tag{3.81}$$

が成立する. 特に, $L(S)$ は同値測度の変換により不変である.

証明. $H = \lambda\mathbb{1}_{B\times\{0\}}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d,\ B \in \mathcal{F}_0)$, $H = \mathbb{1}_{B\times(s,t]}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d,\ 0 < s < t,\ B \in \mathcal{F}_s)$ の場合は明らかに主張が成立する. したがって単調族定理より $H = \lambda\mathbb{1}_D$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d,\ D \in \mathcal{P})$ の場合にも成立する. 確率積分の線形性より, H が $\sum_k \lambda_k \mathbb{1}_{D_k}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^d,\ D_k \in \mathcal{P})$ の形の有限和で表せる場合においても成立する. H が d 次元有界可予測過程のとき, 上の形の H^n により一様に近似できる. このとき

$$(\mathbb{P})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{P})} (\mathbb{P})H \cdot S, \tag{3.82}$$

$$(\mathbb{Q})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{Q})} (\mathbb{Q})H \cdot S \tag{3.83}$$

が成立する. 特に, 補題 3.30 より

$$(\mathbb{P})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{Q})} (\mathbb{P})H \cdot S \tag{3.84}$$

が成立する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathbb{P})H^n \cdot S = (\mathbb{Q})H^n \cdot S$, $\mathbb{Q}$-a.s. が成立するので, $(\mathbb{P})H \cdot S = (\mathbb{Q})H \cdot S$, $\mathbb{Q}$-a.s. を得る. 最後に, $H \in L(S;\mathbb{P})$ とする. このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $H^n = H\mathbb{1}_{\{\|H\|\le n\}}$ と置くと,

$$(\mathbb{P})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{P})} (\mathbb{P})H \cdot S, \tag{3.85}$$

特に

$$(\mathbb{P})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{Q})} (\mathbb{P})H \cdot S \tag{3.86}$$

が成立する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 前半の議論より $(\mathbb{P})H^n \cdot S = (\mathbb{Q})H^n \cdot S$, $\mathbb{Q}$-a.s. が成立するので,

$$(\mathbb{Q})H^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}(\mathbb{Q})} (\mathbb{P})H \cdot S, \tag{3.87}$$

すなわち $H \in L(S;\mathbb{Q})$ かつ $(\mathbb{P})H \cdot S = (\mathbb{Q})H \cdot S$, $\mathbb{Q}$-a.s. が成立する. □

補題 3.35. (i) $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M)$ のとき, $H \in L(M)$ かつ $(\mathcal{S})H \cdot M = (\mathcal{M})H \cdot M$ が成立する.

(ii) $A \in \mathcal{V}^d$, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ のとき, $H \in L(A)$ かつ $(\mathcal{S})H \cdot A = (\mathcal{LS})H \cdot A$ が成立する.

証明. (i) 局所化により, $H \in L^1(M)$ と仮定してよい. このとき

$$(\mathcal{S})(H\mathbb{1}_{\|H\| \leq n\}}) \cdot M = (\mathcal{M})(H\mathbb{1}_{\|H\| \leq n\}}) \cdot M \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{H}^1} (\mathcal{M})H \cdot M, \tag{3.88}$$

特に補題 3.27 より Émery 位相での収束が従う. ゆえに $H \in L(S)$ となり,

$$(\mathcal{S})H \cdot M = (\mathcal{M})H \cdot M \tag{3.89}$$

が成立する.

(ii) ある $C \in \mathcal{V}^+$ およびオプショナル過程 a^i, $i = 1, \cdots, d$ が存在し,

$$A^i = \int_0^\cdot a^i_s dC_s,\ i = 1, \dots, d \tag{3.90}$$

と書ける. 仮定より, 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し

$$\int_0^t \left| \sum_{i=1}^d H^i_s a^i_s \right| dC_s < \infty \text{ a.s.} \tag{3.91}$$

となる. さらに $|K| \leq 1$ なる任意の 1 次元可予測過程 K に対し

$$(K \cdot ((H\mathbb{1}_{\{\|H\| \leq n\}}) \cdot A))^*_t \leq \int_0^t \left| \sum_{i=1}^d H^i_s a^i_s \right| \mathbb{1}_{\{\|H_s\| \leq n\}} dC_s \tag{3.92}$$

が成立する. 優収束定理より右辺は a.s. で n について収束列, したがって $\{K \cdot ((H\mathbb{1}_{\{\|H\| \leq n\}}) \cdot A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は K に関して一様に, u.c.p. 位相で Cauchy 列となる. すなわち $\{(H\mathbb{1}_{\{\|H\| \leq n\}}) \cdot A\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Émery 位相で Cauchy 列となり, $H \in L(A)$ が従う. また

$$(H\mathbb{1}_{\{\|H\| \leq n\}}) \cdot A \xrightarrow[n\to\infty]{\text{ucp}} (\mathcal{LS})H \cdot A, \tag{3.93}$$

$$(H\mathbb{1}_{\{\|H\| \leq n\}}) \cdot A \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} (\mathcal{S})H \cdot A, \tag{3.94}$$

および補題 3.27 より,

$$(\mathcal{S})H \cdot A = (\mathcal{LS})H \cdot A \tag{3.95}$$

が成立する.

□

次の Mémin の定理は確率積分の空間が Émery 位相で閉であることを保証する. 証明は [5] 参照.

命題 3.36 (Mémin, 1980)**.** $S \in \mathcal{S}^d$ とする. このとき集合 $\{H \cdot S \mid H \in L(S)\}$ は Émery 位相で閉である.

注意． (*i*) $S=(S^1,\dots,S^d)\in\mathcal{S}^d$, $H=(H^1,\dots,H^d)$ を d 次元可予測過程とする. もし各成分 H^i が S^i-可積分であるなら, H は S-可積分である. しかし逆は一般には成り立たない. すなわち, ベクトル確率積分 (vector stochastic integration) は成分ごとの確率積分 (componentwise stochastic integration) よりも広いクラスの被積分過程に対し定義される.

(*ii*) $M\in\mathcal{L}^d$ に対し, $H\in L(M)$ であっても, H の M に関する局所マルチンゲールとしての確率積分が存在するとは限らない. 特に $\mathcal{L}$ は Émery 位相に関して閉でない.

例 3.37 (注意 (*i*) に関する例)**.** $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間, W を $\mathbb{R}$-値標準ブラウン運動とし, $\mathbb{F}$ を W により生成されるフィルトレーションの augmentation とする. $d=2$ とし, $\mathbb{R}^2$-値セミマルチンゲール $S=(S^1,S^2)$ を

$$S^1_t=W_t+t,\ S^2_t=-W_t \tag{3.96}$$

と定義する. $H=(H^1,H^2)$ として $H^1_u=H^2_u=\frac{1}{\sqrt{u}}$ を考える. このとき各 $n\in\mathbb{N}$ および $t\in\mathbb{R}_+$ に対し

$$X^n_t=(H^1\mathbb{1}_{\{|H^1|\le n\}}\cdot S^1)_t=\mathbb{1}_{\{t>1/n^2\}}\left(\int_{1/n^2}^t\frac{1}{\sqrt{u}}dW_u+\int_{1/n^2}^t\frac{1}{\sqrt{u}}du\right), \tag{3.97}$$

$$Y^n_t=(H^2\mathbb{1}_{\{|H^2|\le n\}}\cdot S^2)_t=-\mathbb{1}_{\{t>1/n^2\}}\int_{1/n^2}^t\frac{1}{\sqrt{u}}dW_u, \tag{3.98}$$

$$Z^n_t=(H\mathbb{1}_{\{|H|\le n\}}\cdot S)_t=\mathbb{1}_{\{t>2/n^2\}}\int_{2/n^2}^t\frac{1}{\sqrt{u}}du \tag{3.99}$$

となる. $|K|\le 1$ なる任意の可予測過程 K および $t\in\mathbb{R}_+$ に対し, $n>m>\sqrt{\frac{2}{t}}$ なる $n,m\in\mathbb{N}$ について

$$|(K\cdot Z^n)_t-(K\cdot Z^m)_t|\le\int_{2/n^2}^{2/m^2}\frac{1}{\sqrt{u}}du \tag{3.100}$$

となり, 右辺 (確定的) は $m,n\to\infty$ で 0 に収束するので, $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}$ は Émery 位相で Cauchy 列, したがって H は S-可積分である (ベクトル確率積分可能). しかし, H は成分ごとには S について可積分でない. 実際, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$|X^{2n}_1-X^n_1|=\left|\int_{1/n^2}^{1/(4n^2)}\frac{1}{\sqrt{u}}dW_u+\int_{1/n^2}^{1/(4n^2)}\frac{1}{\sqrt{u}}du\right|\ge\left|\int_{1/n^2}^{1/(4n^2)}\frac{1}{\sqrt{u}}dW_u\right|-\frac{1}{2} \tag{3.101}$$

となり, $\int_{1/n^2}^{1/(4n^2)}\frac{1}{\sqrt{u}}dW_u$ が平均 0, 分散 $\int_{1/n^2}^{1/(4n^2)}\frac{1}{u}du=\log 4$ の正規分布に従うことに注意して

$$\mathbb{P}\{|X^{2n}_1-X^n_1|\ge 1\}\ge\mathbb{P}\{|Z|\ge\frac{3}{2\sqrt{\log 4}}\}>0 \tag{3.102}$$

が成立する. ただし Z は標準正規分布に従う確率変数である. したがって $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Émery 位相で Cauchy 列とはならず, H^1 は S^1-可積分でない. 同様にして H^2 も S^2-可積分でないことがわかる.

例 3.38 (注意 (ii) に関する例 (Émery))**.** $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とし, T をパラメータ 2 の指数分布に従う確率変数とする (i.e. $\mathbb{P}\{T>\alpha\}=e^{-2\alpha},\ \forall\alpha\geq 0$). B を Bernoulli 分布に従う T と独立な確率変数とする (i.e. $\mathbb{P}\{B=1\}=\mathbb{P}\{B=-1\}=\frac{1}{2}$). 確率過程 M を次で定義する;

$$M_t=\begin{cases}0, & \text{for } t<T,\\ B, & \text{for } t\geq T.\end{cases} \tag{3.103}$$

$\mathbb{F}$ を M により生成されるフィルトレーションの augmentation とする. このとき M は $\mathbb{F}$ に関してマルチンゲールとなる (時刻 T において ± 1 のジャンプが同じ確率で起きるため, 直観的に「公平」であることがわかる). 今, (確定的な) 確率過程 $H_u=\frac{1}{u}$ を考える. このとき H は M-可積分であり, 確率積分 $X=H\cdot M$ は次で与えられる;

$$X_t=\begin{cases}0, & \text{for } t<T,\\ \frac{B}{T} & \text{for } t\geq T.\end{cases} \tag{3.104}$$

実際, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $(H\mathbb{1}_{\{|H|\leq n\}}\cdot M)_t=\mathbb{1}_{\{t\geq T\geq\frac{1}{n}\}}\frac{B}{T}$ となることに注意して, $|K|\leq 1$ なる任意の可予測過程 K および $t\in\mathbb{R}_+$ に対し

$$(K\cdot(H\mathbb{1}_{\{|H|\leq n\}}\cdot M))_t=\mathbb{1}_{\{t\geq T\geq\frac{1}{n}\}}K_T\frac{B}{T}, \tag{3.105}$$

$$4(K\cdot X)_t=\mathbb{1}_{\{t\geq T\}}K_T\frac{B}{T}, \tag{3.106}$$

したがって任意の $\epsilon>0$ に対し

$$\mathbb{P}\{|(K\cdot(H\mathbb{1}_{\{|H|\leq n\}}\cdot M))_t-(K\cdot X)_t|>\epsilon\}\leq\mathbb{P}\left\{T<\frac{1}{n}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}0 \tag{3.107}$$

となる.

X は時刻 T において $\pm\frac{1}{T}$ のジャンプが同じ確率で起きる確率過程, すなわち公平なゲーム (fair game) であると考えられる. しかし, 可積分性の問題により X は (局所) マルチンゲールとはなり得ない. 実際, 各 $t\in\mathbb{R}_+$ に対し

$$\mathbb{E}[|X_t|]=\int_0^t\left|\frac{B}{T}\right|d\mathbb{P}\{T=u\}=\int_0^t\frac{1}{u}2e^{-2u}du=\infty \tag{3.108}$$

となるため, X はマルチンゲールとはならないことがわかる. 同様に任意の停止時刻 τ に対し $\mathbb{E}[|X_\tau|]=\infty$ となることが確かめられ, X は局所マルチンゲールとはならないことがわかる. 特に, 確率積分 $H\cdot M$ は第 3.1.2 節で定義したマルチンゲールに関する確率積分としては定義できない.

特別セミマルチンゲール

次に, 重要なセミマルチンゲールのクラスである特別セミマルチンゲールを考える.

定義 3.39. $S\in\mathcal{S}$ が $M\in\mathcal{L}$ および可予測有界変動過程 $A\in\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ $(M_0=A_0=0)$ を用いて $S=S_0+M+A$ と書けるとき, S を**特別セミマルチンゲール (special semimartingale)** と呼ぶ. 1 次元特別セミマルチンゲール全体の集合を $\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$, d 次元特別セミマルチンゲール全体の集合を $\mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ と書く.

注意． (i) セミマルチンゲールの局所マルチンゲールと有界変動過程への分解は一意的でないが, $S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ の局所マルチンゲール M および可予測有界変動過程 A $(M_0 = A_0 = 0)$ への分解 $S = S_0 + M + A$ は一意的である. 実際, 可予測有界変動過程で局所マルチンゲールとなるものは 0 と区別不能である [16]. この分解を特別セミマルチンゲール S の**標準分解 (canonical decomposition)** と呼ぶ.

(ii) 例 3.38 より, 特に $\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ は Émery 位相で閉でないことがわかる.

(iii) $S \in \mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ とし, その標準分解を $S = S_0 + M + A$ とする. このとき任意の d 次元局所有界可予測過程 H (このとき $H \in L(S)$ であることに注意) に対し, $H \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ となり. その標準分解は $H \cdot S = H \cdot M + H \cdot A$ で与えられる.

(iv) セミマルチンゲールのクラス $\mathcal{S}$ は同値測度の変換により不変であるが, 特別セミマルチンゲールのクラス $\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ は同値測度の変換により変わり得る.

補題 3.40. $S \in \mathcal{S}$ とすると, 次は同値;

(i) $S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$;

(ii) ある $M \in \mathcal{L}$ および $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ $(M_0 = A_0 = 0)$ が存在し, $S = S_0 + M + A$ と書ける;

(iii) 任意の分解 $S = S_0 + M + A$ $(M \in \mathcal{L},\ A \in \mathcal{V},\ M_0 = A_0 = 0)$ に対し, $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ となる:

(iv) $S^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$;

証明. $(iii) \Rightarrow (ii)$ は自明.

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$

$S = S_0 + M + A,\ M \in \mathcal{L},\ A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}},\ M_0 = A_0 = 0$ と書けるとする. このとき A の可予測 compensator A^p が取れる. $\widehat{M} = M + A - A^p$ と置くと, $\widehat{M} \in \mathcal{L}$ となる. また A^p は可予測かつ $\mathcal{V}$ の元である. $S = S_0 + \widehat{M} + A^p$ より, S は特別セミマルチンゲール, したがって (i) が従う.

$\underline{(i) \Rightarrow (iv)}$

特別セミマルチンゲール S の標準分解を $S = S_0 + M + A$ とする. $A \in \mathcal{V}$ は可予測なので, $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ となる. $A^* \le \mathrm{Var}(A)$ より, $A^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ が従う. $M^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ を示す. 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し M^{τ_n} が一様可積分マルチンゲールとなるものが取れる.

$$\sigma_n = \inf\{t \ge 0 \mid |M_t| > n\} \wedge \tau_n,\ n \in \mathbb{N} \tag{3.109}$$

と置くと, 各 σ_n は停止時刻かつ $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s., さらに

$$M^*_{\sigma_n} \le n + |M_{\sigma_n}| \tag{3.110}$$

となる. $|M_{\sigma_n}| \in L^1(\mathbb{P})$ より, $M \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる. したがって $S^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となり, (iv) が従う.

$\underline{(iv) \Rightarrow (iii)}$

$S = S_0 + M + A$ を S の任意の分解とする. 仮定より, $S^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ である. また上の議論により $M^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ である. したがって $A^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となる. さらに,

$$\mathrm{Var}(A) \le \mathrm{Var}(A)_- + 2A^* \tag{3.111}$$

が成立する. ここで $\mathrm{Var}(A)_-$ は左連続な増加過程であることより, 局所有界である. したがって $\mathrm{Var}(A) \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$, すなわち $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ となり, (iii) が従う. □

特に, 連続なセミマルチンゲールおよび有界なジャンプを持つセミマルチンゲールは (任意の $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ において) 特別セミマルチンゲールである.

補題 3.41. $(\mathcal{S}_{\mathrm{sp}})_{\mathrm{loc}} = \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ が成立する.

証明. S が局所的に特別セミマルチンゲールであるとする. このとき補題 3.8 より S はセミマルチンゲールである. 補題 3.40 に注意して, 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ $(S^{\tau_n})^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となるものが取れる. ゆえに各 $n \in \mathbb{N}$ に対し停止時刻の増大列 $(\sigma_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{m\to\infty} \sigma_{n,m} = \tau_n$ a.s. かつ各 $n, m \in \mathbb{N}$ に対し $(S^{\sigma_{n,m}})^* \in \mathcal{A}^+$ となるものが取れる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\eta_n = \max_{m\leq n} \sigma_{n,m}$ と置くと, $\eta_n \uparrow \infty$ かつ $(S^{\eta_n})^* \in \mathcal{A}^+$ となる. したがって $S^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$ となり, 補題 3.40 より S は特別セミマルチンゲールとなる. □

セミマルチンゲールに関する確率積分について, 次のような疑問を考える;

- $S \in \mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ に関する確率積分 $H \cdot S$ が特別セミマルチンゲールとなるための $H \in L(S)$ に関する条件は？ (H が局所有界なら十分);
- $M \in \mathcal{L}^d$ に関する確率積分 $H \cdot M$ が局所マルチンゲールとなるための条件は？

まず, 次の補題を示す.

補題 3.42. $S \in \mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ とし, その標準分解を $S = S_0 + M + A$ とする. $H \in L(S)$ かつ $H \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ ならば, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$ が成立する (すなわち確率積分 $H \cdot A$ が道ごとの Lebesgue-Stieltjes 積分として定義できる).

証明. 局所化により,

$$S = S_0 + M + A,\ M \in (\mathcal{H}^1)^d,\ A \in (\mathcal{A}^+)^d,\ A \text{ は可予測}, \tag{3.112}$$

$$H \cdot S = N + B,\ N \in \mathcal{H}^1,\ B \in \mathcal{A}^+,\ B \text{ は可予測}, \tag{3.113}$$

としてよい. このときある可予測過程 $C \in \mathcal{V}^+$ および可予測過程 a^i が存在し,

$$A^i = \int_0^{\cdot} a^i_s dC_s,\ i = 1, \dots, d \tag{3.114}$$

が成立する. 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\sum_{i=1}^d H^i_s a^i_s\right| dC_s\right] < \infty \tag{3.115}$$

を示せばよい.

$$K = \mathrm{sign}\left(\sum_{i=1}^d H^i a^i\right) \tag{3.116}$$

とおくと, K は有界可予測過程であり,

$$\int_0^t \left|\sum_{i=1}^d H^i_s a^i_s\right| dC_s = ((KH) \cdot A)_t \tag{3.117}$$

が成立する. $\mathbb{E}[((KH)\cdot A)_t] < \infty$ を示せばよい.

補題 3.32 より

$$(KH)\cdot S = K\cdot(H\cdot S) = K\cdot N + K\cdot B \tag{3.118}$$

となる. $K\cdot N \in \mathcal{H}^1$ であり, $K\cdot B$ は可積分変動かつ可予測である. したがって

$$\mathbb{E}[((KH)\cdot S)_t^*] < \infty \tag{3.119}$$

が成立する. 今, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $H^n = H\mathbb{1}_{\{\|H\|\le n\}}$ と置き,

$$\tau_n = \inf\{s \le t \mid |((KH)\cdot S)_s - ((KH^n)\cdot S)_s| > 1\} \wedge t \tag{3.120}$$

と定義する. τ_n は停止時刻であり, $\tau_n \to t$ a.s. となる.

$$|((KH^n)\cdot S)_{\tau_n}| \le |((KH^n)\cdot S)_{\tau_n-}| + |\Delta((KH^n)\cdot S)_{\tau_n}| \tag{3.121}$$

および

$$|((KH^n)\cdot S)_{\tau_n-}| \le 1 + |((KH)\cdot S)_{\tau_n-}| \le 1 + ((KH)\cdot S)_t^*, \tag{3.122}$$

$$|\Delta((KH^n)\cdot S)_{\tau_n}| \le |\Delta((KH)\cdot S)_{\tau_n}| \le 2((KH)\cdot S)_t^* \tag{3.123}$$

より,

$$|((KH^n)\cdot S)_{\tau_n}| \le 1 + 3((KH)\cdot S)_t^* \tag{3.124}$$

が成立する. また, KH^n は有界可予測過程, $M\in(\mathcal{H}^1)^d$ より, $(KH^n)\cdot M \in \mathcal{H}^1$, すなわち $\mathbb{E}[((KH^n)\cdot M)_{\tau_n}] = 0$ となる. ゆえに

$$\mathbb{E}[((KH^n)\cdot A)_{\tau_n}] = \mathbb{E}[((KH^n)\cdot S)_{\tau_n}] - \mathbb{E}[((KH^n)\cdot M)_{\tau_n}] \le 1 + \mathbb{E}[((KH)\cdot S)_t^*] < \infty \tag{3.125}$$

が成立する. 単調収束定理より, $n\to\infty$ として $\mathbb{E}[((KH)\cdot A)_t] < \infty$ が成立する. □

次の Ansel-Stricker の補題は, 局所マルチンゲールに関する (セミマルチンゲールの意味での) 確率積分が再び局所マルチンゲールとなるための必要十分条件を示すものであり, 一般の枠組みでの無裁定理論を展開する上で非常に重要な役割を持つ.

定理 3.43 (Ansel-Stricker の補題)**.** $M\in\mathcal{L}^d$, $H\in L(M)$ とすると, 次は同値;

(i) $H\cdot M \in \mathcal{L}$;

(ii) 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ および $\theta_n \in L^1_+(\mathbb{P})$, $n\in\mathbb{N}$ が存在し, $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$(\Delta(H\cdot M))^{\tau_n} \ge -\theta_n \tag{3.126}$$

が成立する.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) は局所マルチンゲールが局所的に $\mathcal{H}^1$-マルチンゲールであることより明らか. (ii) $\Rightarrow$ (i) を示す. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $(H\cdot M)^{\tau_n}\in\mathcal{L}$ となることを示す. そのため, 以下 τ_n を省略し, θ_n を単に θ と表す.

$$U = \sum_{s\le\cdot} \mathbb{1}_{\{\|\Delta M_s\|\ge 1 \text{ or } |(H_s,\Delta M_s)|\ge 1\}}\Delta M_s \tag{3.127}$$

と置く. 各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し U_t は有限和であることに注意する. 明らかに $U \in \mathcal{V}^d$ であり, 任意の d 次元可予測過程は $L_{\mathrm{var}}(U)$ の元である. $Y = M - U$ と置く. $\|\Delta Y\| \leq 1$ に注意して, 補題 3.40 より $Y \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}^d$ となる. また, $H \in L(M) \cap L(U)$ より $H \in L(Y)$ であり,

$$H \cdot Y = H \cdot M - H \cdot U, \tag{3.128}$$

$$\Delta(H \cdot Y) = (H, \Delta M) - (H, \Delta U) \tag{3.129}$$

より $|\Delta(H \cdot Y)| \leq 1$ となる. したがって補題 3.40 より $H \cdot Y \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ となる. ゆえに, Y の標準分解を $Y = Y_0 + N + B$ と書くと, 補題 3.42 より $H \in L_{\mathrm{var}}(B)$ となる.

$$V = Y_0 + B + U = M - N \tag{3.130}$$

と置く. $V \in \mathcal{L}^d \cap \mathcal{V}^d$ に注意する. また, $H \in L_{\mathrm{var}}(B) \cap L_{\mathrm{var}}(U)$ より, $H \in L_{\mathrm{var}}(V)$, したがって $H \cdot V = H \cdot B + H \cdot U$ は道ごとの Lebesgue-Stieltjes 積分として定義できる. さらに, $H \in L(M) \cap L(V)$ より, $H \in L(N)$ かつ

$$H \cdot M = H \cdot N + H \cdot V \tag{3.131}$$

が成立する. $H \cdot N \in \mathcal{L}$ および $H \cdot V \in \mathcal{L}$ を示せばよい.

<u>$H \cdot N \in \mathcal{L}$ であること</u>

$(H, \Delta N)$ を評価する.

$$(H, \Delta N) = (H, \Delta Y) - (H, \Delta B) \tag{3.132}$$

に注意する. 右辺第一項については定義より

$$|(H, \Delta Y)| \leq 1 \tag{3.133}$$

が成立する. 右辺第二項を評価する. B は可予測なので, 任意の totally inaccessible な停止時刻 T に対して $\Delta B_T = 0$ となる. したがって可予測停止時刻におけるジャンプのみ評価すればよい. T を可予測停止時刻とする. $N \in \mathcal{L}^d$ より $\mathbb{E}(\Delta N_T | \mathcal{F}_{T-}) = 0$ となる. また, H および B は可予測であることより H_T, B_T は $\mathcal{F}_{T-}$-可測である.

$$\mathbb{E}((H_T, \Delta N_T) | \mathcal{F}_{T-}) = (H_T, \mathbb{E}(\Delta N_T | \mathcal{F}_{T-})) = 0 \tag{3.134}$$

となることに注意して,

$$|(H_T, \Delta B_T)| = |\mathbb{E}((H_T, \Delta Y_T) | \mathcal{F}_{T-})| \leq 1 \tag{3.135}$$

となる. したがって $|(H, \Delta B)| \leq 1$, ゆえに

$$|(H, \Delta N)| \leq 2 \tag{3.136}$$

が成立する. 特に $(\int_0^\cdot \sum_{i,j=1}^d H_s^i H_s^j d[N^i, N^j]_s)^{1/2} \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}^+$, すなわち $H \in L_{\mathrm{loc}}^1(N)$ となり, $H \cdot N \in \mathcal{L}$ となる.

<u>$H \cdot V \in \mathcal{L}$ であること</u>

各 $p \in \mathbb{N}$ に対し

$$\alpha_p = \inf\{t \geq 0 \mid |(H \cdot B)_t| \geq p\}, \tag{3.137}$$

$$\beta_p = \inf\{t \geq 0 \mid |(H \cdot U)_t| \geq p\} \tag{3.138}$$

と定義する. $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ および $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ は停止時刻の増大列であり, $\alpha_p\uparrow\infty$, $\beta_p\uparrow\infty$ a.s. となる. さらに, $|(H,\Delta B)|\le 1$ および仮定 $(H,\Delta M)\ge-\theta$ より

$$|(H\cdot B)^{\alpha_p}|\le p+1, \tag{3.139}$$
$$((H\cdot U)^{\beta_p})^-\le p+\theta \tag{3.140}$$

が成立する. 一方, $V\in\mathcal{L}^d$ より, ある停止時刻の増大列 $(\gamma_p)_{p\in\mathbb{N}}$ で $\gamma_p\uparrow\infty$ a.s. かつ各 $p\in\mathbb{N}$ に対し $V^{\gamma_p}\in(\mathcal{H}^1)^d$ となるものが取れる.

$$T_p=\alpha_p\wedge\beta_p\wedge\gamma_p\wedge p,\ p\in\mathbb{N} \tag{3.141}$$

と置く. $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$ は停止時刻の増大列で, $T_p\uparrow\infty$ a.s. となる.

$p\in\mathbb{N}$ を固定する. $(H\cdot V)^{T_p}=(H\cdot V^{T_p})\in\mathcal{H}^1$ を示す. 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $H^k=H1\!\!1_{\{\|H\|\le k\}}$ と置く. 明らかに

$$|(H^k\cdot B)_{T_p}|\le p+1, \tag{3.142}$$
$$(H^k\cdot U)_{T_p}^-\le p+\theta \tag{3.143}$$

となり, したがって

$$\mathbb{E}[(H^k\cdot V)_{T_p}^-]\le\mathbb{E}[(H^k\cdot B)_{T_p}^-]+\mathbb{E}[(H^k\cdot U)_{T_p}^-]\le 2p+1+\mathbb{E}[\theta]<\infty \tag{3.144}$$

が成立する. 一方, H^k は有界可予測過程であることに注意して, $(H^k\cdot V)^{T_p}\in\mathcal{H}^1$, 特に

$$\mathbb{E}[(H^k\cdot V)_{T_p}]=0 \tag{3.145}$$

となる. すなわち

$$\mathbb{E}[(H^k\cdot V)_{T_p}^+]=\mathbb{E}[(H^k\cdot V)_{T_p}^-]\le 2p+1+\mathbb{E}[\theta], \tag{3.146}$$

ゆえに

$$\mathbb{E}[|(H^k\cdot V)_{T_p}|]\le 2(2p+1+\mathbb{E}[\theta]) \tag{3.147}$$

が成立する. 今, $H^k\cdot V\xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}}H\cdot V$ より, 特に $H^k\cdot V\xrightarrow[k\to\infty]{\text{ucp}}H\cdot V$, したがって各 $p\in\mathbb{N}$ に対し

$$(H^k\cdot V)_{T_p}\xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}}(H\cdot V)_{T_p} \tag{3.148}$$

となる ($T_p\le p$ に注意). ゆえに, Fatou の補題より

$$\mathbb{E}[|(H\cdot V)_{T_p}|]\le 2(2p+1+\mathbb{E}[\theta]) \tag{3.149}$$

が成立する. さらに, T_p の定義より

$$|H\cdot V|\le|H\cdot B|+|H\cdot U|\le 2p\ \ \text{on }[\![0,T_p[\![\ \ \text{a.s.} \tag{3.150}$$

に注意して, 結局

$$\mathbb{E}[(H\cdot V^{T_p})_\infty^*]\le 2p+2(2p+1+\mathbb{E}[\theta])<\infty \tag{3.151}$$

となる. 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\nu_k=\inf\{t\ge0\mid|(H^k\cdot V^{T_p})_t-(H\cdot V^{T_p})_t|>1\} \tag{3.152}$$

と置く. 各 ν_k は停止時刻であり, $\nu_k \uparrow \infty$ が成立する. また, 明らかに $(H^k \cdot V^{T_p})^{\nu_k} \in \mathcal{H}^1$ であり,

$$((H^k \cdot V^{T_p})^{\nu_k})^* \le (H \cdot V^{T_p})^*_\infty + 1 + |\Delta(H \cdot V^{T_p})_{\nu_k}| \le 3(H \cdot V^{T_p})^*_\infty + 1 \tag{3.153}$$

が成立する. したがって優収束定理より

$$\|(H^k \cdot V^{T_p})^{\nu_k} - H \cdot V^{T_p}\|_{\mathcal{H}^1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.154}$$

となり, $\mathcal{H}^1$ の完備性より $H \cdot V^{T_p} \in \mathcal{H}^1$ となる. ゆえに $H \cdot V \in \mathcal{L}$ となり, 主張が示せた. $\square$

Ansel-Stricker の補題より, 直ちに次の系が成立する. この系は後述の投資戦略の許容性 (admissibility) を定義する重要な動機となる.

系 3.44. $M \in \mathcal{L}^d$, $H \in L(M)$ とする. もし $(H \cdot M)^-$ が局所可積分ならば, $H \cdot M \in \mathcal{L}$ となる. 特に, もし $H \cdot M$ が下に有界ならば, $H \cdot M$ は優マルチンゲールとなる.

証明. 仮定より, 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $((H \cdot M)^-)^*_{\tau_n} \in L^1(\mathbb{P})$ となるものが取れる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\sigma_n = \inf\{t \ge 0 \mid (H \cdot M)_t > n\} \wedge \tau_n \tag{3.155}$$

と置く.$(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は停止時刻の増大列で, $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(H, \Delta M)^{\sigma_n} = (H \cdot M)^{\sigma_n} - (H \cdot M)^{\sigma_n}_- \ge -((H \cdot M)^-)^*_{\tau_n} - n \tag{3.156}$$

が成立する. したがって Ansel-Stricker の補題 (定理 3.43) より $H \cdot M \in \mathcal{L}$ となる.

また, Fatou の補題を用いることで, 下に有界な局所マルチンゲールが優マルチンゲールとなることがわかる. $\square$

特別セミマルチンゲールに関する確率積分が再び特別セミマルチンゲールとなるための必要十分条件が従う.

系 3.45. $S \in \mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ とし,S の標準分解を $S = S_0 + M + A$ とする. このとき $H \in L(S)$ に対し次は同値;

(i) $H \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$;

(ii) 次の $(a), (b)$ が成立する;

- (a) $H \in L(M)$ かつ $H \cdot M \in \mathcal{L}$;
- (b) $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$.

さらにこのとき $H \cdot S$ の標準分解は

$$H \cdot S = H \cdot M + H \cdot A \tag{3.157}$$

で与えられる.

証明. $(ii) \Rightarrow (i)$ および後半の主張は明らか. $(i) \Rightarrow (ii)$ を示す.

補題3.42より, $H \in L_{\mathrm{var}}(A)$, すなわち (b) が従う. また $H \cdot A \in \mathcal{V}$ は道ごとのLebesgue-Stieltjes 積分として定義でき, A が可予測であるため $H \cdot A$ も可予測, したがって $H \cdot A \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ となる. 特に, 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\tau_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(H \cdot A)^*_{\tau_n} \in L^1(\mathbb{P})$ となるものが存在する. また, $H \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ より, 補題3.40より $(H \cdot S)^* \in \mathcal{A}^+_{\mathrm{loc}}$. したがって停止時刻の増大列 $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $(H \cdot S)^*_{\sigma_n} \in L^1(\mathbb{P})$ となるものが取れる.

今, $H \in L(S) \cap L(A)$ より $H \in L(M)$ であり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$(H \cdot M)^{\tau_n \wedge \sigma_n} = (H \cdot S)^{\tau_n \wedge \sigma_n} - (H \cdot A)^{\tau_n \wedge \sigma_n} \geq -(H \cdot S)^*_{\sigma_n} - (H \cdot A)^*_{\tau_n} \tag{3.158}$$

が成立する. 系3.44より, $H \cdot M \in \mathcal{L}$ が成立する. □

確率積分の Associativity

命題 3.46 (First Associativity Theorem)**.** $S \in \mathcal{S}^d$, $H \in L(S)$ とし, K を1次元可予測過程とする. このとき

$$K \in L(H \cdot S) \iff KH \in L(S) \tag{3.159}$$

となる. さらにこのとき

$$K \cdot (H \cdot S) = (KH) \cdot S \tag{3.160}$$

が成立する.

証明. $K \in L(H \cdot S)$ と仮定する.

$$D = \{(\omega, t) \mid \|\Delta S_t(\omega)\| > 1 \text{ or } |\Delta(H \cdot S)_t(\omega)| > 1 \text{ or } |\Delta(K \cdot (H \cdot S))_t(\omega)| > 1\} \tag{3.161}$$

と置く. $X = H \cdot S \in \mathcal{S}$, $Y = K \cdot X \in \mathcal{S}$ とし,

$$\widetilde{S} = \sum_{u \leq \cdot} \mathbb{1}_D \Delta S_u, \ \overline{S} = S - \widetilde{S}, \tag{3.162}$$

$$\widetilde{X} = \sum_{u \leq \cdot} \mathbb{1}_D \Delta X_u, \ \overline{X} = X - \widetilde{X}, \tag{3.163}$$

$$\widetilde{Y} = \sum_{u \leq \cdot} \mathbb{1}_D \Delta Y_u, \ \overline{Y} = Y - \widetilde{Y} \tag{3.164}$$

と置く. このとき明らかに

$$\widetilde{X} = H \cdot \widetilde{S}, \tag{3.165}$$

$$\widetilde{Y} = K \cdot \widetilde{X} = (KH) \cdot \widetilde{S} \tag{3.166}$$

が成立する. ゆえに, $H \in L(\overline{S})$, $K \in L(\overline{X})$ かつ

$$\overline{X} = H \cdot S - H \cdot \widetilde{S} = H \cdot (S - \widetilde{S}) = H \cdot \overline{S}, \tag{3.167}$$

$$\overline{Y} = K \cdot X - K \cdot \widetilde{X} = K \cdot (X - \widetilde{X}) = K \cdot \overline{X} \tag{3.168}$$

が成立する.

今, $\overline{S}, \overline{X}, \overline{Y}$ は特別セミマルチンゲールであることに注意する. $\overline{S} \in \mathcal{S}^d_{\mathrm{sp}}$ の標準分解を $\overline{S} = \overline{S}_0 + M + A$ とすると, 系 3.45 より, $H \in L^1_{\mathrm{loc}}(M) \cap L_{\mathrm{var}}(A)$ かつ

$$\overline{X} = H \cdot M + H \cdot A \quad (\text{標準分解}) \tag{3.169}$$

となる. 同様に, $K \in L^1_{\mathrm{loc}}(H \cdot M) \cap L_{\mathrm{var}}(H \cdot A)$ かつ

$$\overline{Y} = K \cdot (H \cdot M) + K \cdot (H \cdot A) \quad (\text{標準分解}) \tag{3.170}$$

となる. 特に $KH \in L^1_{\mathrm{loc}}(M) \cap L_{\mathrm{var}}(A) \subset L(S)$ かつ

$$\overline{Y} = (KH) \cdot M + (KH) \cdot A = (KH) \cdot \overline{S}, \tag{3.171}$$

したがって $KH \in L(S)$ かつ

$$Y = \widetilde{Y} + \overline{Y} = (KH) \cdot (\widetilde{S} + \overline{S}) = (KH) \cdot S \tag{3.172}$$

となる. 逆の関係も同様. □

同様の議論により, 次が従う.

命題 3.47 (Second Associativity Theorem)**.** $S \in \mathcal{S}^d$ とし, $H = (H^1, \cdots, H^d)$ を d 次元可予測過程で各 $i = 1, \cdots, d$ に対し $H^i \in L(S^i)$ であるものとする. $X = (X^1, \cdots, X^d) \in \mathcal{S}^d$ を $X^i = H^i \cdot S^i$, $i = 1, \cdots, d$ と定義する. このとき d 次元可予測過程 $K = (K^1, \cdots, K^d)$ に対し

$$K \in L(X) \iff J \in L(S) \tag{3.173}$$

が成立する. ただし $J = (J^1, \cdots, J^d) = (K^1H^1, \cdots, K^dH^d)$ である. さらにこのとき

$$K \cdot X = J \cdot S \tag{3.174}$$

が成立する.

σ-マルチンゲール

次の補題は [4] による.

補題 3.48. $S \in \mathcal{S}^d$ に対し, 次の 3 条件は同値である;

(*i*) 各 $i = 1, \cdots, d$ に対し, 可予測集合の列 $D_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$ で, $D_n \subset D_{n+1}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \Omega \times \mathbb{R}_+$, かつ各 $\mathbb{1}_{D_n} \cdot S^i$ が一様可積分マルチンゲールとなるものが存在する.

(*ii*) ある $M \in \mathcal{L}^d$ および可予測過程 $H = (H^1, \cdots, H^d)$ で, 各 $i = 1, \cdots, d$ に対し $H^i \in L(M^i)$ かつ $S^i = S^i_0 + H^i \cdot M^i$ となるものが存在する.

(*iii*) ある $N = (N^1, \cdots, N^d) \in (\mathcal{H}^1)^d$ およ正値可予測過程 K で, 各 $i = 1, \cdots, d$ に対し $K \in L(N^i)$ かつ $S^i = S^i_0 + K \cdot N^i$ となるものが存在する.

定義 3.49. 上の補題の同値な 3 条件を満たす $S \in \mathcal{S}^d$ を (d 次元)σ-マルチンゲールと呼び, その全体の集合を Σ^d と表す.

注意 . 局所マルチンゲールはあきらかに σ-マルチンゲールである. また, 離散時間の場合, σ-マルチンゲールのクラスは局所マルチンゲールのクラスと一致する. しかし一般の連続時間の枠組みでは, Σ は $\mathcal{L}$ より真に大きい (反例: 3.38).

Ansel-Stricker の補題（定理 3.43) より, 次が従う.

命題 3.50. $S \in \Sigma$ とする. もし S^- は局所可積分であるならば, $S \in \mathcal{L}$ となる. 特に, もし S が下に有界ならば, S は優マルチンゲールとなる.

また, 確率積分の associativity より, 次が従う.

命題 3.51. $S \in \Sigma^d$ かつ $H \in L(S)$ と仮定する. このとき $H \cdot S \in \Sigma$ となる.

証明. 仮定より, ある $M = (M^1, \cdots, M^d) \in (\mathcal{H}^1)^d$ および正値可予測過程 K で, 各 $i = 1, \cdots, d$ に対し $K \in L(M^i)$ かつ $S^i = S^i_0 + K \cdot M^i$ となるものが存在する. 確率積分に関する Second Associativity Theorem (命題 3.47) より, $J = (KH^1, \cdots, KH^d) \in L(M)$ かつ

$$H \cdot S = J \cdot M \tag{3.175}$$

が成立する. 今, $G = \|J\| \vee 1$, $\widetilde{J} = J/G$ と置くと, $\widetilde{J} \in L(M)$ ($\widetilde{J}$ は有界な d 次元可予測過程) に注意して, 確率積分に関する First Associativity Theorem (命題 3.46) より, $G \in L(\widetilde{J} \cdot M)$ かつ

$$J \cdot M = G \cdot (\widetilde{J} \cdot M) \tag{3.176}$$

が成立する. $\widetilde{J}$が有界であることより, $\widetilde{J} \cdot M \in \mathcal{H}^1$ となる. したがって $H \cdot S = G \cdot (\widetilde{J} \cdot M) \in \Sigma$ となる. □

3.2 様々な無裁定型条件の定義と関係性

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ を通常の条件を満たすフィルトレーション付きの確率空間とし, $S \in \mathcal{S}^d$ とする. また補助的に $S^0 \equiv 1$ を考える. S^0 は安全資産 (riskless asset) を表し, $S = (S^1, \dots, S^d)$ は d 個の危険資産 (risky asset) の S^0 による割引価格を表す. S を (d 次元) マーケットと呼び, $L(S)$ の元をマーケット S における**投資戦略 (trading strategy)** と呼ぶ. 確率積分 $(H \cdot S)_t$ は戦略 H による時刻 t までの累積損益額とみなすことができる.

定義 3.52. H をマーケット S の投資戦略とし, $a > 0$ とする. $H \cdot S \geq -a$ かつ $(H \cdot S)_\infty \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to \infty} (H \cdot S)_t$ が存在するとき, H は **a-admissible** であるという. a-admissible な投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}_a = \mathcal{H}_a(S)$ と書く. また, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a>0} \mathcal{H}_a$ と定義し, $\mathcal{H}$ の元を単に admissible であるという.

Ansel-Stricker の補題 (定理 3.43) より, $S \in \Sigma^d$ ならば, 任意の admissible strategy $H \in \mathcal{H}$ に対し $H \cdot S$ は優マルチンゲールとなる. 特に

$$\mathbb{E}[(H \cdot S)_\infty] \leq 0 \tag{3.1}$$

が成立する.

(優) ヘッジ可能なクレームの集合は次のように定義される.

定義 3.53.

$$\mathcal{K}_a \stackrel{\text{def}}{=} \{(H \cdot S)_\infty \mid H \in \mathcal{H}_a\},\ a > 0, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{(H \cdot S)_\infty \mid H \in \mathcal{H}\}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{C}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K} - L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}); \tag{3.4}$$

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0 \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \tag{3.5}$$

$\mathcal{K}_a, \mathcal{K},$ および $\mathcal{C}^0$ は $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐であり, $\mathcal{C}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐であることに注意する. さらに $\mathcal{C}^0 \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は立体型 (solid) である. つまり, 任意の $f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ および $g \in \mathcal{C}^0$ に対し, $f \leq g$ a.s. ならば $f \in \mathcal{C}^0$ が成立する.

この設定の下で, 次の三つの無裁定型条件を考える.

定義 3.54. (*i*) $\mathcal{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$ となるとき, マーケット S は **No Arbitrage 条件** (NA) を満たすという.

(*ii*) $\mathcal{K}_1$ が $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ において有界 (確率収束位相で有界) となるとき, マーケット S は **No Unbounded Profit with Bounded Risk 条件** $(NUPBR)$ を満たすという.

(*iii*) $\overline{\mathcal{C}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$ となるとき, マーケット S は **No Free Lunch with Vanishing Risk 条件** $(NFLVR)$ を満たすという. ここで, $\overline{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ の $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-ノルムにおける閉包を表す.

注意 . (*i*) (NA) は $\mathcal{K} \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$ と同値である.

(*ii*) $(NUPBR)$ はリスクが一様有界 (1-admissible) な戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ で, 正の確率で任意に大きい富を得られる (unbounded profit) ようなものが存在しないことを表す.

(*iii*) 明らかに, $(NFLVR) \Rightarrow (NA)$ が成立する.

(*iv*) もし $(NFLVR)$ が不成立なら, ある $f_0 \in L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で $\mathbb{P}\{f_0 > 0\} > 0$ かつ f_0 に a.s. で収束する $\mathcal{C}$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n \geq f_0 - \frac{1}{n}$, 特に $f_n \geq -\frac{1}{n}$ となるものが存在する. これは裁定機会より弱い概念であるが, 最終損失額が任意に小さくなり (vanishing risk), かつ近似的に正の利益を得る (free lunch) という意味から, 裁定機会同様マーケットモデルにおいて排除されるべき戦略であると考えられる.

この節では, 数理ファイナンスの基本定理 (Delbaen-Schachermayer の定理) を述べる前に, (NA), $(NUPBR)$, $(NFLVR)$ それぞれの関係性について議論する. 次の補題は無裁定理論においてしばしば用いられる.

補題 3.55. (*i*) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の任意の $[0, \infty)$-値確率変数の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, ある $[0, \infty]$-値確率変数 g および $(f_n)n \in \mathbb{N}$ の **forward convex combination** $g_n \in \operatorname{conv}(f_n, f_{n+1}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $g_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ a.s. が成立する.

(*ii*) もし (*i*) において $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が L^0-有界なら, $g < \infty$ a.s. となるように取れる.

(*iii*) もし (*i*) においてある $\alpha > 0$ および $\delta > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{f_n \geq \alpha\} \geq \delta$ となるなら, $\mathbb{P}\{g > 0\} > 0$ となるように取れる.

証明. 関数 $u:\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}\to[0,1]$ を

$$u(x)=1-e^{-x} \tag{3.6}$$

と定義する (u は効用関数とみなすこともできる). 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$s_n=\sup\{\mathbb{E}[u(g)]\mid g\in\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\dots)\} \tag{3.7}$$

とし, $g_n\in\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\dots)$ を $\mathbb{E}[u(g_n)]\geq s_n-\frac{1}{n}$ となるように取る. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $[0,1]$ の減少列であるので, ある $s_0\in[0,1]$ が存在し $s_n\downarrow s_0$ $(n\to\infty)$ となる. このとき $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[u(g_n)]=s_0$ が成立する.

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ がある $[0,\infty]$-値確率変数 g に確率収束することを示す. コンパクト距離空間 $[0,\infty]$ において, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in[0,\infty]$ が Cauchy 列であることは, 任意の $\epsilon>0$ に対しある $N\in\mathbb{N}$ が存在し, 任意の自然数 $m,n\geq N$ に対し $|x_n-x_m|\leq\epsilon$ または $x_n\wedge x_m\geq\epsilon^{-1}$ が成立することと同値であることに注意する. $\alpha>0$ を任意に取り固定する. u の (一様) 凹性より, ある $\beta>0$ が存在し, $|x-y|>\alpha$ かつ $x\wedge y<\alpha^{-1}$ なる任意の $x,y\in[0,\infty)$ に対し

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\frac{1}{2}(u(x)+u(y))+\beta \tag{3.8}$$

が成立する. したがって各 $n,m\in\mathbb{N}$ に対し

$$A_{n,m}=\{|g_n-g_m|>\alpha\text{かつ }g_n\wedge g_m<\alpha\} \tag{3.9}$$

と置くと,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right] &= \mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\mathbb{1}_{A_{n,m}}\right]+\mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\mathbb{1}_{A_{n,m}^c}\right] \quad (3.10)\\ &\geq \frac{1}{2}(\mathbb{E}[u(g_n)]+\mathbb{E}[u(g_m)])+\beta\mathbb{P}(A_{n,m}) \quad (3.11)\end{aligned}$$

が成立する. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の構成法より,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{n,m}) &\leq \frac{1}{\beta}\left(\mathbb{E}\left[u\left(\frac{g_n+g_m}{2}\right)\right]-\frac{1}{2}(\mathbb{E}[u(g_n)]+\mathbb{E}[u(g_m)])\right) \quad (3.12)\\ &\leq \frac{1}{\beta}\left(s_{n\wedge m}-\frac{1}{2}\left(s_n+s_m-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\right) \quad (3.13)\end{aligned}$$

となり, 右辺は $n,m\to\infty$ で 0 に収束する. したがって $\mathbb{P}(A_{n,m})\to0$ $(n,m\to\infty)$ となり, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};[0,\infty])$ で Cauchy 列となる. したがってある $g_0\in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};[0,\infty])$ が存在し, $g_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}g_0$ となる. 部分列を取ることにより a.s. での収束が従う. したがって (i) が示せた.

もし $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が L^0-有界なら, 任意の $\epsilon>0$ に対しある $M>0$ が存在し, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{f_n\geq M\}\leq\epsilon$ となる. このとき任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{g_n\geq M\}\leq\epsilon$ となり, したがって $\mathbb{P}\{g\geq M\}\leq\epsilon$ となる. $\epsilon>0$ は任意だったので, $g<\infty$ a.s. となり, (ii) が従う.

もし (iii) のような $\alpha,\delta>0$ が存在するなら, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $s_n\geq\mathbb{E}[u(f_n)]\geq\delta u(\alpha)$ となる. したがって優収束定理より $\mathbb{E}[u(g)]\geq\delta u(\alpha)>0$, 特に $\mathbb{P}\{g>0\}>0$ となり, (iii) が従う. □

注意． 上の補題は, [29] により次のように精密化された; $L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の閉凸集合 C に対し, 次の 2 条件は同値;

(*i*) C は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$-有界;

(*ii*) 任意のネット $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対し, ある forward convex combination subnet $\{g_\beta\}_{\beta\in B}$ で $\mathbb{P}\text{-}\lim_\beta g_\beta = \exists g\in C$ となるものが存在する.

ここで, $\{g_\beta\}_{\beta\in B}$ が $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の forward convex combination subnet であるとは, B は有効族であり, ある写像 $D: B\to\{A$ の有限部分集合$\}$ で次の性質を持つものが存在することをいう;

- $g_\beta\in\mathrm{conv}\{f_\alpha\mid\alpha\in D(\beta)\}$, $\forall\beta\in B$;
- 任意の $\alpha\in A$ に対し, ある $\beta\in B$ が存在し, 全ての $\alpha'\in\bigcup_{\beta'\succeq\beta}D(\beta')$ に対し $\alpha'\succeq\alpha$ となる.

[29] では上の形の主張が (局所凸とは限らない) 一般の位相線形空間において, 凸コンパクト性 (convexly compact) という概念と関連付けて示された.

命題 3.56. マーケット S に対し, $(NFLVR)\Rightarrow(NUPBR)$ が成立する.

証明. 主張を否定し矛盾を導く. $(NUPBR)$ が不成立であると仮定する. このときある $\alpha>0$ および $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}_1$ が存在し, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{(H^n\cdot S)_\infty\geq n\}\geq\alpha \tag{3.14}$$

が成立する. そこで, $f_n=\min(\frac{1}{n}(H^n\cdot S)_\infty,1)$ と置くと, $f_n\in\mathcal{C}$ であり, $\mathbb{P}\{f_n=1\}\geq\alpha$ かつ $\|f_n^-\|_\infty\leq\frac{1}{n}$ が成立する. 補題 3.55 より, ある $[0,1]$-値確率変数 g および $g_n\in\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\dots)$ $(n\in\mathbb{N})$ が存在し, $g_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}g$ a.s. が成立する. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{E}[f_n]\geq\alpha-\frac{1}{n}$ が成立することに注意して, $\mathbb{E}[g_n]\geq\alpha-\frac{1}{n}$, したがって $\mathbb{E}[g]\geq\alpha$ が成立する. $\beta=\mathbb{P}\{g>0\}$ と置くと, g は $[0,1]$-値であることに注意して $\beta\geq\mathbb{E}[g]\geq\alpha>0$ が成立する. Egorov の定理より, $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega})\geq1-\frac{\beta}{2}$ なる $\widetilde{\Omega}\in\mathcal{F}$ が存在し, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は g に $\widetilde{\Omega}$ 上一様収束する. そこで, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $h_n=\min(g_n,\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}})$ と置くと, $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ のノルム位相で $h_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}g\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}$ となる. したがって $g\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}\in\overline{\mathcal{C}}\cap L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ となるが, $\mathbb{P}\{g\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}>0\}\geq\frac{\beta}{2}>0$ より, 仮定 $(NFLVR)$ に矛盾する. □

次に, (NA) の仮定の下で $(NFLVR)$ の特徴づけをする.

補題 3.57. マーケット S が (NA) を満たすとする. このとき $H\in\mathcal{H}$ に対し $\delta=\|(H\cdot S)_\infty^-\|_\infty$ と置くと, $H\in\mathcal{H}_\delta$, すなわち $H\cdot S\geq-\delta$ となる.

証明. 主張を否定し矛盾を導く. ある $t\in\mathbb{R}_+$ に対し,

$$A_t=\{(H\cdot S)_t<-\delta\} \tag{3.15}$$

が $\mathbb{P}(A_t)>0$ を満たすと仮定する. $A_t\in\mathcal{F}_t$ に注意して, $K=H\mathbb{1}_{A_t\times(t,\infty)}$ と置くと, $K\in\mathcal{H}$ かつ

$$(K\cdot S)_\infty=((H\cdot S)_\infty-(H\cdot S)_t)\mathbb{1}_{A_t}\in L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\setminus\{0\} \tag{3.16}$$

となり, 仮定 (NA) に矛盾する. □

命題 3.58. マーケット S が (NA) を満たすと仮定する. このとき次は同値である;

(i) $(NFLVR)$ が不成立;

(ii) $\mathbb{P}\{f_0 > 0\} > 0$ なる $[0,\infty]$-値確率変数 f_0 および $f_n \in \mathcal{K}_{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$ で, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} f_0$ となるものが存在する.

証明. (ii) を仮定する. このとき列 $(nf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_1$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で非有界となり, $(NUPBR)$ が不成立となる. 命題 3.56 より $(NFLVR)$ が不成立となり, (i) が従う.

逆に, (i) を仮定, すなわち $(NFLVR)$ が不成立であると仮定する. このときある $g_0 \in L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ および $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ で, $\mathbb{P}\{g_0 \geq \alpha\} \geq \alpha$ かつ $\|g_n - g_0\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となるものが存在する. このとき特に $\|g_n^-\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる. したがって部分列を考えることにより, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\|g_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ と仮定してよい. $\mathcal{C}$ の定義より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対しある $L^n \in \mathcal{H}$ が存在し,

$$h_n = (L^n \cdot S)_\infty \geq g_n \text{ a.s.} \tag{3.17}$$

が成立する. このとき

$$\|h_n^-\|_\infty \leq \|g_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n} \tag{3.18}$$

および仮定 (NA) に注意して, 補題 3.57 より $L^n \in \mathcal{H}_{1/n}$ となる. また, 補題 3.55 より, ある $[0,\infty]$-値確率変数 f_0 および $f_n \in \mathrm{conv}(h_n, h_{n+1}, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.s. となる. 対応する $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の凸結合を $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ とすると, 明らかに $H^n \in \mathcal{H}_{1/n}$ となる. また, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\left\{h_n \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \geq \mathbb{P}\left\{g_n \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \tag{3.19}$$

となることより, 補題 3.55(iii) に注意して $\mathbb{P}\{f_0 > 0\} > 0$ となる. □

命題 3.59. マーケット S に対し, 次は同値;

(i) $(NFLVR)$ が成立;

(ii) $\|g_n^-\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ なる任意の列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ に対し, $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ が成立する.

証明. (ii) を仮定する. このとき明らかに (NA) が成立する. 命題 3.58 より $(NFLVR)$ が成立する.

$(i) \Rightarrow (ii)$ を示す. $(NFLVR)$ の成立を仮定する. このとき明らかに (NA) が成立する. (ii) が不成立であると仮定し矛盾を導く. このとき $\|g_n^-\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ なる列 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ で, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{g_n \geq \alpha\} \geq \alpha > 0 \tag{3.20}$$

となるものが存在する. 補題 3.57 より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n \in \mathcal{K}_{1/n}$ となる. したがって $(ng_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_1$ となり, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{ng_n \geq n\alpha\} \geq \alpha > 0, \tag{3.21}$$

したがって $(ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で非有界となる. すなわち $(NUPBR)$ が不成立となるが, 命題 3.56 よりこれは仮定 $(NFLVR)$ に矛盾する. □

系 3.60. マーケット S に対し, 次の同値関係が成立する;

$$(NFLVR) \iff (NA) + (NUPBR). \tag{3.22}$$

証明. $(\Rightarrow)$ は定義および命題3.56 より. $(\Leftarrow)$ を示す. マーケット S が (NA) および $(NUPBR)$ を満たすと仮定する. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ で $\epsilon_n = \|g_n^-\|_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ なるものを任意に取る. 仮定 (NA) および補題3.57 より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n \in \mathcal{K}_{\epsilon_n}$, したがって $\frac{1}{\epsilon_n} g_n \in \mathcal{K}_1$ となる. 仮定 $(NUPBR)$ より $(\frac{1}{\epsilon_n} g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は L^0-有界とならなければならないが, $\epsilon_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ より $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ とならなければならない. したがって命題3.59 より $(NFLVR)$ が成立する. □

3.3 Delbaen-Schachermayer の定理

フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 上の d 次元マーケット S を考える. ここで, フィルトレーション $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ は通常の条件を満たすとし, 簡単のため $\mathcal{F}_0$ は $\mathbb{P}$-trivial かつ $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F}_t$ であると仮定する. $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{Q}$ で $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ なるものは, Radon-Nikodym 導関数と同一視することによりに $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の元とみなせる.

S に対する条件 $(NFLVR)$

$$\overline{\mathcal{C}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \tag{3.1}$$

は, 凸錐 $\mathcal{C}$ の $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ での性質と見ることができる. そこで双対 $(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ を考えることにより, $(NFLVR)$ の $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に関する特徴づけを考える. この双対表現こそが数理ファイナンスの基本定理の本質である.

3.3.1 $NFLVR$ の双対表現

まず, マルチンゲール測度のクラスを次のように定義する.

定義 3.61. マーケット S の (局所, σ-) マルチンゲール測度 ((local, σ-)martingale measure) の集合をそれぞれ次で定義する;

$$\mathcal{M}(S) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid S \text{ は } \mathbb{Q} \text{ の下でマルチンゲール}\}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{M}_{\text{loc}}(S) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid S \text{ は } \mathbb{Q} \text{ の下で局所マルチンゲール}\}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{M}_\sigma(S) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid S \text{ は } \mathbb{Q} \text{ の下で} \sigma\text{-マルチンゲール}\}. \tag{3.4}$$

また, S の**分離測度 (separating measure)** の集合を次で定義する;

$$\mathcal{M}_s(S) \overset{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_\mathbb{Q}[(H \cdot S)_\infty] \le 0,\ \forall H \in \mathcal{H}\} = \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_\mathbb{Q}[f] \le 0,\ \forall f \in \mathcal{C}\}. \tag{3.5}$$

$\mathcal{M}(S), \mathcal{M}_{\text{loc}}(S)$, および $\mathcal{M}_s(S)$ の元で $\mathbb{P}$ と同値なものの集合をそれぞれ $\mathcal{M}^e(S), \mathcal{M}^e_{\text{loc}}(S)$, $\mathcal{M}^e_\sigma(S)$ および $\mathcal{M}^e_s(S)$ と書きその元をそれぞれ S の同値マルチンゲール測度, 同値局所マルチンゲール測度, 同値 σ マルチンゲール測度, および同値分離測度という.

明らかに上の八つの集合は $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の凸集合である. マーケット S が

$$\mathcal{M}^e(S)\neq\phi,\ (\text{resp. } \mathcal{M}^e_{\text{loc}}(S)\neq\phi,\ \mathcal{M}^e_\sigma(S)\neq\phi,\ \mathcal{M}^e_s(S)\neq\phi) \tag{3.6}$$

を満たすとき, S は条件 (EMM), (resp. $(ELMM)$, $(E\sigma M)$, (ESM)) を満たすという.

補題 3.62. マーケット S に対し次が成立する;

$$\mathcal{M}(S)\subset\mathcal{M}_{\text{loc}}(S)\subset\mathcal{M}_\sigma(S)\subset\mathcal{M}_s(S); \tag{3.7}$$

$$\mathcal{M}^e(S)\subset\mathcal{M}^e_{\text{loc}}(S)\subset\mathcal{M}^e_\sigma(S)\subset\mathcal{M}^e_s(S). \tag{3.8}$$

したがって特に

$$(EMM)\ \Rightarrow\ (ELMM)\ \Rightarrow\ (E\sigma M)\ \Rightarrow\ (ESM) \tag{3.9}$$

となる.

証明. $\mathcal{M}(S)\subset\mathcal{M}_{\text{loc}}(S)\subset\mathcal{M}_\sigma(S)$ は自明. S の σ-マルチンゲール測度 $\mathbb{Q}$ を考える. $L(S;\mathbb{P})\subset L(S;\mathbb{Q})$ かつ確率積分が測度変換により不変であること (補題 3.34), および Ansel-Stricker の補題 (定理 3.43) より, 任意の $H\in\mathcal{H}$ に対し $(H\cdot S)$ は $\mathbb{Q}$-優マルチンゲール, 特に

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(H\cdot S)_\infty]\leq 0 \tag{3.10}$$

が成立する. したがって $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(S)$ となる. □

補題 3.63. (*i*) S が有界である場合, $\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}_s(S)$ が成立する. 特にこのとき (ESM) と (EMM) は同値である.

(*ii*) S が局所有界である場合, $\mathcal{M}_{\text{loc}}(S)=\mathcal{M}_s(S)$ が成立する. 特にこのとき (ESM) と $(ELMM)$ は同値である.

証明. (*i*) 任意の $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_s(S)$ を固定する. $\mathbb{Q}$ の下で S がマルチンゲールとなることを示せばよい. 今, S が有界であることより, 任意の $0\leq s<t$, $A\in\mathcal{F}_s$, および $i\in\{1,\dots,d\}$ に対し,

$$H^+=e^i\mathbb{1}_{A\times(s,t]},\ H^-=-e^i\mathbb{1}_{A\times(s,t]} \tag{3.11}$$

はともに $\mathcal{H}$ の元である. ただし $e^i=(0,\dots,0,1,0,\dots,o)$ ($\mathbb{R}^d$ の i 番目の標準基底) である.

$$(H^\pm\cdot S)_\infty=\pm\mathbb{1}_A(S^i_t-S^i_s) \tag{3.12}$$

に注意して, $\mathbb{Q}$ の取り方より

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\pm\mathbb{1}_A(S^i_t-S^i_s)]\leq 0, \tag{3.13}$$

したがって $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A(S^i_t-S^i_s)]=0$ となる. $0\leq s<t$, $A\in\mathcal{F}_s$, および $i\in\{1,\dots,d\}$ は任意だったので, S は $\mathbb{Q}$ の下でマルチンゲール, すなわち $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(S)$ となる.

(ii) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_s(S)$ とする. $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(S)$ を示す. 仮定より, 停止時刻の増大列 $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\tau_n \uparrow \infty$ $\mathbb{P}$-a.s. かつ各 $n \in \mathbb{N}$ に対し S^{τ_n} が有界となるものが取れる. そこで各 $0 \le s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$, $i \in \{1, \dots, d\}$, および $n \in \mathbb{N}$ に対し $K^{n,\pm}$ を上の $H^{\pm}$ を用いて $K^{n,\pm} = H^{\pm}\mathbb{1}_{]\!]0,\tau_n]\!]}$ と定義すると, $K^{n,\pm} \in \mathcal{H}$ となる.

$$(K^{n,\pm} \cdot s)_\infty = \pm\mathbb{1}_A((S^{\tau_n})^i_t - (S^{\tau_n})^i_s) \tag{3.14}$$

に注意して, (i) と同様に, 各 S^{τ_n} は $\mathbb{Q}$-マルチンゲールとなることがわかる. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ より $\tau_n \uparrow \infty$ $\mathbb{Q}$-a.s. に注意して, S は $\mathbb{Q}$ の下で局所マルチンゲール, すなわち $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(S)$ となる.

□

さらに, [11] により次が示された.

補題 3.64. マーケット S が (ESM) を満たすと仮定する. このとき $\mathcal{M}^e_\sigma(S)$ は $\mathcal{M}^e_s(S)$ において全変動ノルムに関して稠密である. 特に (ESM) と $(E\sigma M)$ は同値である.

(ESM) と無裁定条件の関係性について考える.

命題 3.65. マーケット S に対し,

$$(ESM) \implies (NFLVR) \tag{3.15}$$

が成立する.

証明. $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e_s(S)$ とすると, 任意の $f \in \mathcal{C}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0$ となる. ここで $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ より $\mathcal{C}$ の L^∞-ノルムの閉包は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{P}$ で一致することに注意して, 任意の $f \in \overline{C}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0$ が成立することがわかる. もしこの f が $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ の元ならば, $f = 0$ $\mathbb{Q}$-a.s., したがって $f = 0$ $\mathbb{P}$-a.s. となる. ゆえに $\overline{\mathcal{C}} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$ が成立する. □

注意 . 上の命題および系 3.60 より,

$$(ESM) \implies (NA) + (NUPBR) \tag{3.16}$$

がわかるが, これも容易に直接示すことができる. 実際, $(ESM) \Rightarrow (NA)$ は上と同様 ($\mathcal{C}$ の閉包を取る必要はない). また, $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e_s(S)$ とすると, 任意の $f \in \mathcal{K}_1$ に対し

$$f^- \le 1, \tag{3.17}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0 \tag{3.18}$$

となる. したがって $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f^+] \le 1$, すなわち $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|f|] \le 2$ が成立する. ゆえに $\mathcal{K}_1$ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ のノルム位相で有界, $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ に注意して, 特に $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で有界となる. したがって $(NUPBR)$ が成立する.

次の二つの例からわかる通り, $(NA) \Rightarrow (ESM)$, $(NUPBR) \Rightarrow (ESM)$ は一般には成立しない.

例 3.66 ((NA) 成立, (ESM) 不成立. [8]). 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上のブラウン運動 $W = (W_t)_{t\in[0,1]}$ および natural filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}$ を考える. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, $t \in [0,1)$ とし,

$$L_t = \begin{cases} \exp(-(f\cdot W)_t - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(u)du) & \text{if } t < 1 \\ 0 & \text{if } t = 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

と置く. このとき $L = (L_t)_{t\in[0,1]}$ は $(\mathbb{P}, (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]})$-局所マルチンゲールである. $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}$-停止時刻 τ を $\tau = \inf\{t \in [0,1] \mid L_t \geq 2\}$ と置くと, 停止過程 L^τ は $(\mathbb{P}, (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]})$-有界マルチンゲールとなる. また

$$L_\tau = \begin{cases} 2 & \text{if } \tau < 1 \\ 0 & \text{if } \tau = 1 \end{cases} \tag{3.20}$$

に注意して, $1 = \mathbb{E}_\mathbb{P}[L_\tau] = 2\mathbb{P}\{\tau < 1\}$, したがって $\mathbb{P}\{\tau < 1\} = \frac{1}{2}$ となる. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]} = (\mathcal{G}_{t\wedge\tau})_{t\in[0,1]}$ は W^τ の natural filtration, W^τ は $(\mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]})$-ブラウン運動となる.

フィルトレーション付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_1, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}, \mathbb{P})$ 上の (1 次元) 価格過程 S を

$$S_t = W_t^\tau + \int_0^{t\wedge\tau} f(u)du \tag{3.21}$$

により定義する. S は $\mathbb{P}$-a.s. で連続であることに注意する. Girsanov の定理より, S の局所マルチンゲール測度 $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ はただ一つ存在し, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_\tau$ で与えられる. $\mathbb{P}\{L_\tau = 0\} = \frac{1}{2}$ より, $\mathcal{F}_1$ 上で $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{P}$ について同値とはならない. したがって S の同値局所マルチンゲール測度は存在せず, ($ELMM$), すなわち (ESM) は不成立である.

今, S が (NA) を満たすことを示す. 任意の $t \in [0,1)$ に対し $L_t^\tau > 0$, $\mathbb{P}$-a.s. であることより, $\mathbb{Q} \sim_t \mathbb{P}$ ($\mathcal{F}_t$ 上の確率測度として $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{P}$ は同値) となることに注意する. $H \in \mathcal{H}_1$ で $(H\cdot S)_1 \geq 0$, $\mathbb{P}$-a.s. となるものを任意に取る. このとき $H\cdot S$ は $\mathbb{P}$-a.s. で連続である. $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ より $(H\cdot S)_t \geq -1$, $\mathbb{Q}$-a.s. $(\forall t \in [0,1])$ かつ $(H\cdot S)_1 \geq 0$, $\mathbb{Q}$-a.s. であり, S が $\mathbb{Q}$-局所マルチンゲールであることに注意して, Ansel-Stricker の補題 (系 3.44) より, $H\cdot S$ は $\mathbb{Q}$-優マルチンゲールとなる. したがって $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[(H\cdot S)_1] \leq 0$, ゆえに $(H\cdot S)_1 = 0$, $\mathbb{Q}$-a.s. が成立する. 今, $\epsilon > 0$ を任意に取り, $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$-停止時刻 $\sigma = \inf\{t \in [0,1] \mid (H\cdot S)_t \geq \epsilon\}$ を考える. $K = \mathbb{1}_{[\![0,\sigma]\!]}H$ と置くと, $K \in \mathcal{H}_1$ かつ

$$(K\cdot S)_1 = \begin{cases} (H\cdot S)_1 \geq 0 & \text{on } \{\sigma = 1\},\ \mathbb{P}\text{-a.s.} \\ \epsilon > 0 & \text{on } \{\sigma < 1\},\ \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{cases} \tag{3.22}$$

となる. したがって上の議論より $\mathbb{Q}\{\sigma < 1\} = 0$ となる. $\epsilon > 0$ は任意だったので, 各 $t \in [0,1)$ に対し $(H\cdot S)_t \leq 0$, $\mathbb{Q}$-a.s. となる. $\mathbb{Q} \sim_t \mathbb{P}$ より, $(H\cdot S)_t \leq 0$, $\mathbb{P}$-a.s. となり, $H\cdot S$ が $\mathbb{P}$-a.s. で連続であることより $(H\cdot S)_1 = 0$, $\mathbb{P}$-a.s. が成立する. したがって S は (NA) を満たす.

例 3.67 (($NUPBR$) 成立, (ESM) 不成立, [8]). 次が成立する (証明は [8], Corollary 11.2.10 参照);

> $S = (S_t)_{t\in[0,1]}$ を 3 次元ベッセル過程とし, その natural filtration を考える. このとき S は ($NUPBR$) を満たすが (ESM) は満たさない.

次の定理は有限次元マーケットにおけるいわばメタ型の数理ファイナンスの基本定理である.

定理 3.68. マーケット S に対し

$$(NFLVR) \iff (ESM) \tag{3.23}$$

が成立する.

この定理の系として, 上の議論より, 次の数理ファイナンスの基本定理が従う.

系 3.69 (Delbaen-Schachermayer, 1994,1998)**.** (i) マーケット S に対し

$$(NFLVR) \iff (E\sigma M) \tag{3.24}$$

が成立する.

(ii) マーケット S が有界な d 次元セミマルチンゲールであるとき,

$$(NFLVR) \iff (EMM) \tag{3.25}$$

が成立する.

(iii) マーケット S が局所有界な d 次元セミマルチンゲールであるとき,

$$(NFLVR) \iff (ELMM) \tag{3.26}$$

が成立する.

まとめると次のように書ける.

命題 3.70. d 次元マーケット S に対し次の関係が成立する;

$$(NFLVR) \Leftrightarrow (NA)\text{+}(NUPBR) \Leftrightarrow (ESM) \Leftrightarrow \begin{cases} (E\sigma M) & \\ (ELMM) & \text{if } S \text{ is locally bounded} \\ (EMM) & \text{if } S \text{ is bounded} \end{cases}, \tag{3.27}$$

$$(NA) \not\Rightarrow (ESM), \tag{3.28}$$

$$(NUPBR) \not\Rightarrow (ESM). \tag{3.29}$$

以下, 定理 3.68 の $(NFLVR) \Rightarrow (ESM)$ を証明することを目標とする.

注意 . Delbaen-Schachermayer の論文 [9] では有界な d 次元マーケットを仮定して $(NFLVR) \Rightarrow (EMM)$ を証明しているが, この証明において有界性は不要である. 実際, S の有界性は補題 3.63 においてのみ用いられており, 数理ファイナンスの基本定理の本質は $(NFLVR)$ の $(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ における双対として (ESM) を特徴付けるところにある.

3.3.2 $(NFLVR) \Rightarrow (ESM)$ の証明

以下, 一般の d 次元マーケット S において $(NFLVR) \Rightarrow (ESM)$ を示すことを考える. 証明は次のような流れになる;

(i) $(NFLVR)$ が成立するならば, $\mathcal{C}^0 \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は Fatou-closed(後述) である.

(ii) 一般に, 凸錐 $X \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が Fatou-closed ならば, $X \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相 $(\sigma(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})))$ で閉である.

(iii) 凸錐 $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相で閉ならば, 無裁定条件 $\mathcal{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$ および一般化 Kreps-Yan の定理 (定理 2.8) より, ある $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ が存在し, 任意の $f \in \mathcal{C}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0$ となる. すなわち $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e_s(S)$ となり, (ESM) が従う.

つまり, $\mathcal{C}$ が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の汎弱位相で閉であることが示せれば, Hahn-Banach の分離定理の亜種である Kreps-Yan の定理により, 同値分離測度 $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e_s(S)$ が $\mathcal{C}$ と $L^\infty_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を分離する「超平面」として存在することが証明される. 最も難解な部分は初めのステップ (i) である.

定義 3.71. $X \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n^-\|_\infty < \infty$ かつ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \exists f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ なる任意の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ に対し $f \in X$ となるとき, X は Fatou-closed であるという.

まず, ステップ (ii) を証明するために, 関数解析による次の補題を証明する.

補題 3.72. C を $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐とし, $B = \{f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ とする. このとき次は同値;

(i) C は $\sigma(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-closed;

(ii) $C \cap B$ は $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-closed.

証明. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$

$C \cap B$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \exists f \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ なるものを任意に取る. $f \in C \cap B$ を示せばよい ($L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は距離化可能であることに注意). 明らかに $f \in B$ である. $f \notin C$ と仮定して矛盾を導く. 仮定より C は $\sigma(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-closed なので, Hahn-Banach の分離定理 (コンパクト凸と閉凸の強分離) より, ある $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が存在し

$$\sup_{h\in C} \mathbb{E}[hg] < \mathbb{E}[fg] \tag{3.30}$$

が成立する. 一方, 各 f_n は B の元であるため $f_n g \geq -|g|$ a.s. となることに注意して,Fatou の補題より

$$\mathbb{E}[fg] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_n g] \tag{3.31}$$

が成立する. しかし, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C$ であることより右辺は $\leq \sup_{h\in C} \mathbb{E}[gh]$ となる. したがって矛盾が生じる.

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$

$\sigma(L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}))$ は距離化可能でないことに注意. 任意のネット $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を考える.

$$w^*\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = \exists f \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) \tag{3.32}$$

とする. このとき $f\in C$ となることを示す. 一様有界性原理より,

$$M=\sup_{\lambda\in\Lambda}\|f_\lambda\|_\infty<\infty \tag{3.33}$$

となる. 各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $g_\lambda=\frac{1}{M}f_\lambda$ と置く. C は錐であることに注意して $g_\lambda\in C\cap B$ となる. 今, 仮定より $C\cap B$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の有界閉凸集合である. ゆえに, 補題 3.55 の後の注意より, $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の forward convex combination subnet $(h_\pi)_{\pi\in\Pi}$ が存在し, $h_\pi \xrightarrow[\pi\in\Pi]{\mathbb{P}} \exists h\in C\cap B$ となる. 明らかに

$$w^*\text{-}\lim_{\pi\in\Pi} h_\pi=\frac{1}{M}f \tag{3.34}$$

より, $h=\frac{1}{M}f$ が成立する. C が錐であることに注意して $f=Mh\in C$ となる. □

命題 3.73. 凸錐 $X\subset L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ が Fatou-closed ならば, $X\cap L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の汎弱位相で閉である.

証明. $X\cap B$ の列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \exists f\in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ なるものを任意に取る. 明らかに $f\in B$ である. また, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n\geq -1$ となるので, 仮定より $f\in X$, すなわち $f\in X\cap B$ となる. ゆえに $X\cap B$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で閉であり, 前補題より $X\cap L^\infty$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の汎弱位相で閉である. □

以上の議論より, 第一のステップ

(i) $(NFLVR)$ が成立するならば, $\mathcal{C}^0\subset L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ は Fatou-closed である.

を示せば, $(NFLVR)\Rightarrow(ESM)$ が従う. 以下, $(NFLVR)$ を仮定する.
<u>Notation</u>

- 一般に, $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の部分集合 $\mathcal{D}$ に対し, その $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ における閉包を $\widehat{\mathcal{D}}$ と表す.
- $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ において, 順序 $f\geq g$ a.s. を考える. $\mathcal{D}\subset L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ における極大元の集合を $\mathcal{D}^{\max}$ と表す. すなわち, $f\in\mathcal{D}$ が $\mathcal{D}$ の極大元であるとは, $f\leq g$ a.s. かつ $g\in\mathcal{D}$ ならば $f=g$ a.s. となることをいう.
- $h\in L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ に対し, $\mathcal{D}_h \overset{\text{def}}{=} \{f\in\widehat{\mathcal{K}}_1 \mid f\geq h \text{ a.s.}\}$ と置く.

$h_n\geq -1$ a.s. $\forall n\in\mathbb{N}$ かつ $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} h$ なる任意の列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}^0$ を固定する. $h\in\mathcal{C}^0$ となることを示せばよい. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, $g_n\geq h_n$ a.s. なる $g_n\in\mathcal{K}$ が取れる. 特に $g_n\geq -1$ a.s. であるため, (NA) および補題 3.57 より $g_n\in\mathcal{K}_1$ である. forward convex combination を考えることにより, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ はある g に a.s. で収束するとしてよい. このとき $g\in\mathcal{D}_h$, 特に $\mathcal{D}_h\neq\phi$ となる. これと $(NUPBR)$ に注意して, $\mathcal{D}_h$ は $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の<u>有界</u>閉凸集合であることがわかる. 一般に次が成立する.

補題 3.74. $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の空でない任意の有界閉集合 $\mathcal{D}$ は極大元を持つ.

証明. $\mathcal{D}$ の元に対し $f \geq g$ a.s. による順序を考える. A を $\mathcal{D}$ の任意の全順序部分集合とする. A に対し上界が存在することが示せれば, Zorn の補題より主張が従う.

$$s = \sup\{\mathbb{E}[\arctan(f)] \mid f \in A\} \tag{3.35}$$

と置く. このときある列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ で $\mathbb{E}[\arctan(f_n)] \uparrow s$ なるものが存在する. A が $\mathcal{D}$ の全順序部分集合であることより, $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ a.s. が成立, したがって $f_0 = \lim_{n\to\infty} f_n$ が a.s. で存在する. さらに, $\mathcal{D}$ が $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で有界かつ閉であることより, $f_0 < \infty$ a.s. かつ $f_0 \in \mathcal{D}$ である. f_0 が A の上界となることを示す. もし $\mathbb{P}\{f > f_0\} > 0$ なる $f \in A$ が存在したとすると, f_0 の取り方より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{f > f_n\} > 0$ となる. したがって, A が全順序であることより $f \geq f_n$ a.s. が成立, ゆえに $f \geq f_0$ a.s. かつ $\mathbb{P}\{f > f_0\} > 0$ となる. したがって

$$\mathbb{E}[\arctan(f_0)] < \mathbb{E}[\arctan(f)] \tag{3.36}$$

となるが, 優収束定理より

$$\mathbb{E}[\arctan(f_0)] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\arctan(f_n)] = s \tag{3.37}$$

であるため, s の取り方に矛盾する. ゆえに任意の $f \in A$ に対し $f \leq f_0$ a.s. が成立, すなわち $f_0 \in \mathcal{D}$ は A の上界である. □

上の補題より, $\mathcal{D}_h^{\max} \neq \phi$ である.

$h \in \mathcal{C}_0$ を示すために,

$$\mathcal{D}_h^{\max} \subset \mathcal{K}_1 \tag{3.38}$$

を示せば十分である. $f_0 \in \mathcal{D}_h^{\max}$ を任意に取り固定する. このとき $f_0 \in \mathcal{K}_1$ であること, すなわちある $H^0 \in \mathcal{H}_1$ が存在し $f_0 = (H^0 \cdot S)_\infty$ a.s. となることを示す. $f_0 \in \widehat{\mathcal{K}}_1$ より, ある列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ が存在し,

$$f_n = (H^n \cdot S)_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0 \text{ a.s.} \tag{3.39}$$

となる. しかしこのままでは被積分過程の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ の適当な意味での収束は従わない. そこでこの列を修正することにより, 極限として上のような $H^0 \in \mathcal{H}_1$ の存在性を導くことを考える.

補題 3.75. $h \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{D}_h^{\max} \neq \phi$ とする. このとき $f_0 \in \mathcal{D}_h^{\max}$ および近似列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$, $f_n = (H^n \cdot S)_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.s. に対し,

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{D}_{\mathrm{up}}[(H^n - H^m) \cdot S] = 0 \tag{3.40}$$

が成立する.

証明. 主張を否定し矛盾を導く. このときある $i_k, j_k \uparrow \infty$ および $\alpha > 0$ が存在し, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{(((H^{i_k} - H^{j_k}) \cdot S)^+)^*_\infty > \alpha\} \geq \alpha \tag{3.41}$$

が成立する. そこで停止時刻

$$T_k = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid ((H^{i_k} - H^{j_k}) \cdot S)_t > \alpha\} \tag{3.42}$$

を考えると, $\mathbb{P}\{T_k < \infty\} \geq \alpha$ が成立する.

$$L^k = H^{i_k}\mathbb{1}_{]\!]0,T_k]\!]} + H^{j_k}\mathbb{1}_{]\!]T_k,\infty[\![} \tag{3.43}$$

と置く. このとき $L^k \in \mathcal{H}_1$ となる. 実際, $t \leq T_k$ に対し

$$(L^k \cdot S)_t = (H^{i_k} \cdot S)_t \geq -1, \tag{3.44}$$

$t > T_k$ に対し

$$(L^k \cdot S)_t = (H^{i_k} \cdot S)_{T_k} + (H^{j_k} \cdot S)_t - (H^{j_k} \cdot S)_{T_k} \geq -1 + \alpha > -1 \tag{3.45}$$

となる. 今,

$$\rho_k = (L^k \cdot S)_\infty = (H^{i_k} \cdot S)_{T_k} + (H^{j_k} \cdot S)_\infty - (H^{j_k} \cdot S)_{T_k} = \phi_k + \psi_k \tag{3.46}$$

と置く. ただし,

$$\phi_k = f_{i_k}\mathbb{1}_{\{T_k=\infty\}} + f_{j_k}\mathbb{1}_{\{T_k<\infty\}}, \tag{3.47}$$

$$\psi_k = ((H^{i_k} - H^{j_k}) \cdot S)_{T_k}\mathbb{1}_{\{T_k<\infty\}} \tag{3.48}$$

とする. このとき

$$\phi_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0 \text{ a.s.} \tag{3.49}$$

が成立する. 一方, $\psi_k \geq 0$ a.s. かつ $\mathbb{P}\{\psi_k \geq \alpha\} \geq \alpha > 0$ に注意して, 補題 3.55 より, $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $(\widetilde{\psi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ で,$\mathbb{P}\{\psi_0 > 0\} > 0$ なる $[0,\infty)$-値確率変数 ψ_0 に a.s. で収束するものが取れる. したがって, 対応する $(\rho_k)_{K\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination を $(\widetilde{\rho}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ と書くと, $\widetilde{\rho}_k \in \mathcal{K}_1$ かつ

$$\widetilde{\rho}_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0 + \psi_0 \text{ a.s.} \tag{3.50}$$

が成立する. ゆえに $f_0 + \psi_0 \in \widehat{\mathcal{K}}_1$ かつ $f_0 + \psi_0 \geq f_0 \geq h$ a.s., すなわち $f_0 + \psi_0 \in \mathcal{D}_h$ となるが, これは f_0 が $\mathcal{D}_h$ の極大元であることに矛盾する. □

特に, $\xi = \sup_{n\in\mathbb{N}}(H^n \cdot S)^*_\infty < \infty$ a.s. となる. そこで同値確率測度 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ を $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = c\exp(-\xi)$ ($c > 0$ は正規化定数) により定義すると, $\xi \in L^2(\mathbb{Q})$, 特に補題 3.40 より, 各 $X^n = H^n \cdot S$ は $\mathbb{Q}$ の下で特別セミマルチンゲールとなる. 条件 $(NFLVR)$, (ESM), および集合 $\mathcal{D}_h^{\max}$ は同値確率測度の変換により不変であることに注意して, $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ かつ $X^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}(\mathbb{P})$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ と仮定して良い.

ここまでの流れをまとめると次のようになる;

(i) $(NFLVR) = (NA) + (NUPBR)$ を仮定する. このとき (ESM) の成立を示したい.

(ii) $\mathcal{C}^0 \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が Fatou-closed であることを示せばよい.

(iii) $h_n \geq -1$ a.s. $\forall n \in \mathbb{N}$ かつ $h_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} h$ なる任意の列 $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^0$ を取る. $h \in \mathcal{C}^0$ となることを示せばよい.

(iv) $\mathcal{D}_h \overset{\text{def}}{=} \{f \in \widehat{\mathcal{K}}_1 \mid f \geq h \text{ a.s.}\}$ と置くと, (NA) より $\mathcal{D}_h \neq \phi$, さらに $(NUPBR)$ より $\mathcal{D}_h$ は L^0-有界, したがって $\mathcal{D}_h^{\max} \neq \phi$ となる. $\mathcal{D}_h^{\max} \subset \mathcal{K}_1$ を示せばよい.

(v) $f_0 \in \mathcal{D}_h^{\max}$ を任意に取る. $f_0 \in \widehat{\mathcal{K}}_1$ より, ある列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ が存在し, $f_n = (H^n \cdot S)_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.s. が成立する.

(vi) $X^n = H^n \cdot S$ と置く. 同値確率測度の変換を考えることにより, $\|\sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)^*_\infty\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} < \infty$ と仮定してよい. このとき特に, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $X^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}(\mathbb{P})$ となる.

注意 . これまでの ($\mathcal{C}^0$ が Fatou-closed であることの) 証明において, 仮定 (NA) は $\mathcal{D}_h \neq \phi$ であることのみに用いていることに注意する. 以下, 仮定 $(NUPBR)$ の下 ((NA) は不要!), 上で構成した $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $(\widetilde{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, (強) セミマルチンゲール位相で Cauchy 列となるものが存在することを示す. これが示せれば, 対応する $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination を $(\widetilde{H}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ としたとき, Mémin の定理 (命題 3.36) より, ある $H^0 \in L(S)$ が存在し,

$$\widetilde{H}^n \cdot S \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} H^0 \cdot S \tag{3.51}$$

となる. このとき明らかに各 $t \in \mathbb{R}_+$ に対し $(H \cdot S)_t \geq -1$ a.s. が成立する. さらに, 補題 3.75 に注意して, (さらに部分列を取ることにより) a.s. で $t \in \mathbb{R}_+$ について一様に $(\widetilde{H}^n \cdot S)_t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (H^0 \cdot S)_t$ となる. ゆえに

$$\begin{aligned}(H^0 \cdot S)_\infty &= \lim_{t\to\infty}(H^0 \cdot S)_t = \lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\widetilde{H}^n \cdot S)_t \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to\infty}(\widetilde{H}^n \cdot S)_t = \lim_{n\to\infty}(\widetilde{H}^n \cdot S)_\infty = f_0 \text{ a.s.}\end{aligned} \tag{3.52}$$

が成立する. したがって $H^0 \in \mathcal{H}_1$ かつ $f_0 \in \mathcal{K}_1$ となり, 証明が完了する.

次の補題は一般のセミマルチンゲールに対して成立する.

補題 3.76. $S \in \mathcal{S}$, $1 < p \leq \infty$ とし, $\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p} < \infty$ と仮定する. このとき $S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ であり, さらに標準分解 $S = S_0 + M + A$ に対し

$$\|(\Delta A)^*_\infty\|_{L^p} \leq \tfrac{p}{p-1}\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p}, \tag{3.53}$$

$$\|(\Delta M)^*_\infty\|_{L^p} \leq \tfrac{2p-1}{p-1}\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p} \tag{3.54}$$

が成立する.

証明. S は局所 p-可積分, 特に局所可積分なので, 補題 3.40 より特別セミマルチンゲールである. 標準分解を $S = S_0 + M + A$ とし, càdlàg マルチンゲール N を $N_t = \mathbb{E}((\Delta S)^*_\infty|\mathcal{F}_t)$ により定義する.

A は可予測過程であることに注意して, 集合 $\{\Delta A \neq 0\}$ は可算個の可予測停止時刻 $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を用いて $\{\Delta A \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\![T_n]\!]$ と書ける. さらに, M は局所マルチンゲールであることより, 任意の可予測停止時刻 T に対し $\mathbb{E}(\Delta M_T|\mathcal{F}_{T-}) = 0$, したがって $\Delta A_T = \mathbb{E}(\Delta S_T|\mathcal{F}_{T-})$ となる. ゆえに

$$|\Delta A_T| \leq \mathbb{E}(|\Delta S_T|\ |\mathcal{F}_{T-}) \leq \mathbb{E}((\Delta S)^*_\infty|\mathcal{F}_{T-}) = Y_{T-} \leq Y^*_\infty \tag{3.55}$$

が成立する. T は任意の可予測停止時刻であったので, $(\Delta A)^* \leq Y^*_\infty$ が成立する. Doob の不等式より

$$\|Y^*_\infty\|_{L^p} \leq \frac{p}{1-p}\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p}, \tag{3.56}$$

したがって

$$\|(\Delta A)^*_\infty\|_{L^p} \le \tfrac{p}{p-1}\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p}, \tag{3.57}$$
$$\|(\Delta M)^*_\infty\|_{L^p} \le \tfrac{2p-1}{p-1}\|(\Delta S)^*_\infty\|_{L^p} \tag{3.58}$$

が成立する. □

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n \in \mathcal{H}_1$, $X^n = H^n \cdot S$ とし, $\lambda = \|\sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)^*_\infty\|_{L^2} < \infty$ と仮定する. 各 $X^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ の標準分解を $X^n = M^n + A^n$ と書く. まず, $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $(\widetilde{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ で, 標準分解のマルチンゲール項の列 $(\widetilde{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が Émery 位相で収束列となるものが存在することを示す. その後, 対応する可予測有界変動過程の列 $(\widetilde{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ も Émery 位相で収束列となることを示す.

命題 3.77. マーケット S が $(NUPBR)$ を満たすと仮定する. このとき列 $((M^n)^*_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ は L^0-有界である.

証明. 主張を否定し矛盾を導く. このとき部分列を取ることにより, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{(M^n)^*_\infty > n^3\} \ge \alpha > 0 \tag{3.59}$$

が成立するとしてよい. また, Chebyshev の不等式より, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{(X^n)^*_\infty > n\} \le \alpha$ が成立する.

Step.1

停止時刻 τ_n を

$$\tau_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (M^n)^*_t > n^3 \text{ or } (X^n)^*_t > n\} \tag{3.60}$$

と定義し, $\widetilde{H}^n = n^{-3}\mathbb{1}_{[\![0,\tau_n]\!]}H^n \in \mathcal{H}_{n^{-3}}$, $\widetilde{X}^n = \widetilde{H}^n \cdot S = \widetilde{M}^n + \widetilde{A}^n$ (標準分解) と置く. このとき十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{(\widetilde{M}^n)^*_\infty \ge 1\} \ge \mathbb{P}\{(M^n)^*_\infty > n^3 \text{かつ} (X^n)^*_\infty > n\} \ge 7\alpha \tag{3.61}$$

が成立する. また, 仮定および補題 3.76 より $\|(\Delta\widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \le 6n^{-3}\lambda$, したがって十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\|(\Delta\widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2} \le n^{-1}$ となる.

Step.2

上のような十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し, 停止時刻の列 $(T^n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を次で定義する;

$$T^n_0 = 0, \tag{3.62}$$
$$T^n_i = \inf\{t \ge T^n_{i-1} \mid |\widetilde{M}^n_t - \widetilde{M}^n_{T^n_{i-1}}| > n^{-1}\},\ i \ge 0 \tag{3.63}$$

このとき $\forall i = 1, 2, \cdots, k_n = [\frac{n\alpha}{4}]$ に対し

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{M}^n_{T^n_i} - \widetilde{M}^n_{T^n_{i-1}} \le -\frac{\alpha}{n}\right\} \ge \alpha^2 \tag{3.64}$$

が成立する. 実際, 各 n, i に対し, $f^n_i = \widetilde{M}^n_{T_i} - \widetilde{M}^n_{T_{i-1}}$, $\Gamma^n = \{T^n_{k_n} < \infty\}$, $B^n_i = \{(f^n_i)^- \ge \frac{\alpha}{n}\}$ と置く. $\mathbb{P}(B^n_i) \ge \alpha^2$ を示せばよい. $\|f^n_i\|_{L^2} \le n^{-1} + \|(\Delta\widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2} \le 2n^{-1}$ に注意して, Doob の不等式より $\|(\mathbb{1}_{]\!]T^n_{i-1},T^n_i]\!]} \cdot \widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2} \le 2\|f^n_i\|_{L^2} \le 4n^{-1}$ となる. したがって

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{M}^n)^*_\infty\mathbb{1}_{(\Gamma^n)^c}\|_{L^2} &= \left\|\left(\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{1}_{]\!]T^n_{i-1},T^n_i]\!]}\right)\cdot\widetilde{M}^n\right)^*_\infty\mathbb{1}_{(\Gamma^n)^c}\right\|_{L^2}\\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^{k_n}\|(\mathbb{1}_{]\!]T^n_{i-1},T^n_i]\!]}\cdot\widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2} \le 4k_nn^{-1} \le \alpha,\end{aligned} \tag{3.65}$$

ゆえにChebyshevの不等式より$\mathbb{P}\{(\widetilde{M}^n)^*_\infty \mathbb{1}_{(\Gamma^n)^c} \geq 1\} \leq \alpha^2$が成立する. これと$\mathbb{P}\{(\widetilde{M}^n)^*_\infty \geq 1\} \geq 7\alpha$ より

$$\mathbb{P}(\Gamma^n) \geq \mathbb{P}\{(\widetilde{M}^n)^*_\infty \geq 1\} - \mathbb{P}(\{(\widetilde{M}^n)^*_\infty \geq 1\} \cap (\Gamma^n)^c) \geq 7\alpha - \alpha^2 \geq 6\alpha \tag{3.66}$$

が従う. 今, 各$\forall i = 1, 2, \cdots, k_n$ に対し $\{|f_i^n| \geq n^{-1}\} \supset \Gamma^n$ となることに注意して, $\widetilde{M}^n$ のマルチンゲール性より

$$\mathbb{E}[(f_i^n)^-] = \mathbb{E}[(f_i^n)^+] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[|f_i^n|] \geq \frac{1}{2n}\mathbb{P}\{|f_i^n| \geq n^{-1}\} \geq \frac{3\alpha}{n} \tag{3.67}$$

となる. Cauchy-Schwarz の不等式より

$$\|(f_i^n)^-\|_{L^2}\sqrt{\mathbb{P}(B_i^n)} \geq \mathbb{E}[(f_i^n)^- \mathbb{1}_{B_i^n}] = \mathbb{E}[(f_i^n)^-] - \mathbb{E}[(f_i^n)^- \mathbb{1}_{(B_i^n)^c}] \geq \frac{3\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} = \frac{2\alpha}{n} \tag{3.68}$$

となり, $\|(f_i^n)^-\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \leq \|f_i^n\|_{L^2} \leq 2n^{-1}$ より $\mathbb{P}(B_i^n) \geq \alpha^2$ が成立する.

Step.3

十分大きい $n \in \mathbb{N}$ および任意の停止時刻σ, τ に対し, Chebyshev の不等式より

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|\widetilde{X}^n_\tau - \widetilde{X}^n_\sigma| \geq \tfrac{\alpha}{2n}\} &\leq \tfrac{4n^2}{\alpha^2}\|\widetilde{X}^n_\tau - \widetilde{X}^n_\sigma\|^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \\ &\leq \tfrac{4n^2}{\alpha^2}(2n^{-3}\|(X^n)^*_\infty\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})})^2 \leq \tfrac{16\lambda^2}{n^4\alpha^2} \leq \tfrac{\alpha^2}{2}\end{aligned} \tag{3.69}$$

が成立する. これと $\widetilde{X}^n = \widetilde{M}^n + \widetilde{A}^n$ に注意して, Step.2 より, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ および$\forall i = 1, 2, \cdots, k_n$ に対し

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{A}^n_{T_i^n} - \widetilde{A}^n_{T_{i-1}^n} \geq \frac{\alpha}{2n}\right\} \geq \frac{\alpha^2}{2} \tag{3.70}$$

が成立する.

Step.4

$r^n = \frac{d\widetilde{A}^n}{d|\widetilde{A}^n|}$ とし, $K^n = \mathbb{1}_{\{r^n=1\}\cap [\![0,T_{k_n}^n]\!]}$, $Y^n = (K^n\widetilde{H}^n)\cdot S$ と置く. r^n および K^n は可予測過程であることに注意する. このとき $\widetilde{X}^n = \widetilde{M}^n + \widetilde{A}^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ (標準分解) かつ K^n が有界であることより

$$Y^n = K^n \cdot \widetilde{X}^n = K^n \cdot \widetilde{M}^n + K^n \cdot \widetilde{A}^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}} \tag{3.71}$$

となる. ここで最右辺は$Y^n \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ の標準分解となる. このとき $K^n \cdot \widetilde{A}^n - \widetilde{A}^n$ は増加過程であることより, 任意の停止時刻$\sigma \leq \tau$ に対し a.s. で

$$(K^n \cdot \widetilde{A}^n)_\tau - (K^n \cdot \widetilde{A}^n)_\sigma = ((K^n \cdot \widetilde{A}^n)_\tau - \widetilde{A}^n_\tau) - ((K^n \cdot \widetilde{A}^n)_\sigma - \widetilde{A}^n_\sigma) + (\widetilde{A}^n_\tau - \widetilde{A}^n_\sigma) \geq \widetilde{A}^n_\tau - \widetilde{A}^n_\sigma \tag{3.72}$$

となる. ゆえに Step.3 より, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ および$\forall i = 1, 2, \cdots, k_n$ に対し

$$\mathbb{P}\left\{(K^n \cdot \widetilde{A}^n)_{T_i^n} - (K^n \cdot \widetilde{A}^n)_{T_{i-1}^n} \geq \frac{\alpha}{2n}\right\} \geq \frac{\alpha^2}{2} \tag{3.73}$$

が成立する.

Step.5

今, ある$\beta > 0$ で, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{(K^n \cdot \widetilde{A}^n)_{T_{k_n}^n} \geq \beta\} \geq \beta$ となるものが存在することを示す. $\xi_i^n = (K^n \cdot \widetilde{A}^n)_{T_i^n} - (K^n \cdot \widetilde{A}^n)_{T_{i-1}^n}$ と置くと, $K^n \cdot \widetilde{A}^n$ が増加過程であ

ることより各 ξ_i^n は非負確率変数であり, $(K^n\cdot\widetilde{A}^n)_{T^n_{k_n}}=\sum_{i=1}^{k_n}\xi_i^n$ と書ける. また, Step.4 より, 十分大きい $n\in\mathbb{N}$ および $\forall i=1,2,\cdots,k_n$ に対し $\mathbb{P}\{\xi_i^n\geq\frac{\alpha}{2n}\}\geq\frac{\alpha^2}{2}$ となる. したがって, $C^n_\beta=\{(K^n\cdot\widetilde{A}^n)_{T^n_{k_n}}\geq\beta\}$ と置くと

$$\begin{aligned}\beta(1-\mathbb{P}(C^n_\beta))&\geq\mathbb{E}[(K^n\cdot\widetilde{A}^n)_{T^n_{k_n}}\mathbb{1}_{(C^n_\beta)^c}]=\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}[\xi_i^n\mathbb{1}_{(C^n_\beta)^c}]\\ &\geq\textstyle\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{E}[\xi_i^n\mathbb{1}_{\{\xi_i^n\geq\alpha/(2n)\}\cap(C^n_\beta)^c}]\geq\frac{\alpha}{2n}\sum_{i=1}^{k_n}\mathbb{P}(\{\xi_i^n\geq\frac{\alpha}{2n}\}\cap(C^n_\beta)^c)\\ &\geq\textstyle\frac{\alpha}{2n}\sum_{i=1}^{k_n}(\mathbb{P}\{\xi_i^n\geq\frac{\alpha}{2n}\}-\mathbb{P}(C^n_\beta))\geq\frac{k_n\alpha}{2n}(\frac{\alpha^2}{2}-\mathbb{P}(C^n_\beta))\end{aligned}\tag{3.74}$$

となる. $k_n=[\frac{n\alpha}{4}]$ に注意して, $n\in\mathbb{N}$ に依らない定数 $\beta>0$ で $\mathbb{P}(C^n_\beta)\geq\beta$ となるものが取れる.

Step.6

$H^n\in\mathcal{H}_1$ より $X^n\geq-1$ である. さらに $[\![0,\tau_n[\![$ において $X^n\leq n$ である. したがって, $[\![0,\tau_n]\!]$ において $\Delta X^n\geq-(n+1)$ となる. ゆえに

$$(\Delta Y^n)^-\leq(\Delta\widetilde{X}^n)^-\mathbb{1}_{[\![0,\tau_n]\!]}\leq(n+1)n^{-3}\tag{3.75}$$

が成立する. また, Step.1 より $\|(\Delta\widetilde{M}^n)^*_\infty\|_{L^2}\leq6n^{-3}\lambda$ が成立する. したがって

$$\|\widetilde{M}^n_{T^n_{k_n}}\|_{L^2}\leq\sum_{i=1}^{k_n}(\|\widetilde{M}^n_{T^n_i-}-\widetilde{M}^n_{T^n_{i-1}}\|_{L^2}+\|\Delta\widetilde{M}^n_{T^n_i}\|_{L^2})\leq(n^{-1}+6n^{-3})k_n\leq2n^{-1}k_n,\tag{3.76}$$

ゆえに, Chebyshev の不等式および Doob の不等式を用いて

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{(K^n\cdot\widetilde{M}^n)^*_\infty\geq\gamma_n\}&\leq\gamma_n^{-2}\|(K^n\cdot\widetilde{M}^n)^*_\infty\|^2_{L^2}\leq4\gamma_n^{-2}\|(K^n\cdot\widetilde{M}^n)_\infty\|^2_{L^2}\\ &\leq4\gamma_n^{-2}\|\widetilde{M}^n_{T^n_{k_n}}\|^2_{L^2}\leq16\gamma_n^{-2}n^{-2}k_n\end{aligned}\tag{3.77}$$

となる. $k_n=[\frac{n\alpha}{4}]$ に注意して, 上式は $\gamma_n=o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ のとき 0 に収束する. $Y^n\geq K^n\cdot\widetilde{M}^n$ より,

$$\mathbb{P}\{((Y^n)^-)^*_\infty\geq\gamma_n\}\leq\mathbb{P}\{(K^n\cdot\widetilde{M}^n)^*_\infty\geq\gamma_n\}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\tag{3.78}$$

となる. また, 十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}\{(K^n\cdot\widetilde{M}^n)_{T^n_{k_n}}\leq-\frac{\beta}{2}\}\leq\frac{\beta}{2}$ となることおよび Step.5 より, 十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\left\{Y^n_\infty\geq\frac{\beta}{2}\right\}\geq\mathbb{P}\left\{(K^n\cdot\widetilde{A}^n)_{T^n_{k_n}}\geq\beta\text{ and }(K^n\cdot\widetilde{M}^n)_{T^n_{k_n}}\geq-\frac{\beta}{2}\right\}\geq\frac{\beta}{2}\tag{3.79}$$

が成立する.

Step.7

各 $n\in\mathbb{N}$ に対し停止時刻 $\sigma_n=\inf\{t\in\mathbb{N}\mid(Y^n_t)^->\gamma_n\}$ を考える.

$$L^n=((n+1)n^{-3}+\gamma_n)^{-1}\mathbb{1}_{[\![0,\sigma_n]\!]}K^n\widetilde{H}^n\tag{3.80}$$

と置く. このとき $L^n\in L(S)$ かつ $L^n\cdot S=((n+1)n^{-3}+\gamma_n)^{-1}\mathbb{1}_{[\![0,\sigma_n]\!]}\cdot Y^n$ となる. ゆえに Step.6 $((\Delta Y^n)^-\leq(n+1)n^{-3})$ より $L^n\cdot S\geq-1$, すなわち $L^n\in\mathcal{H}_1$ である. 一方

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{L^n\cdot S\geq((n+1)n^{-3}+\gamma_n)^{-1}\tfrac{\beta}{2}\right\}&\geq\mathbb{P}\left\{Y^n_\infty\geq\tfrac{\beta}{2}\text{ and }\sigma_n=\infty\right\}\\ &\geq\mathbb{P}\left\{Y^n_\infty\geq\tfrac{\beta}{2}\right\}-\mathbb{P}\{((Y^n)^-)^*_\infty\geq\gamma_n\}\end{aligned}\tag{3.81}$$

となるが, $((n+1)n^{-3}+\gamma_n)^{-1}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, $\mathbb{P}\{Y^n_\infty\geq\frac{\beta}{2}\}\geq\frac{\beta}{2}$, および $\mathbb{P}\{((Y^n)^-)^*_\infty\geq\gamma_n\}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ より, 戦略の列 $(L^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の構成は仮定 $(NUPBR)$ に矛盾する. □

$\tau_c^n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (M^n)_t^* > c\}$, $X_c^n = \mathbb{1}_{]\!]\tau_c^n,\infty[\![} \cdot X^n$ と置く.

命題 3.78. ($NUPBR$) を仮定する. このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $c_0 > 0$ が存在し, 任意の $c \geq c_0$ および任意の convex comvination $\widetilde{X} = \sum \lambda_i X_c^i$ に対し $\mathbb{P}\{\widetilde{M}_\infty^* > \epsilon\} \leq \epsilon$ が成立する. ここで $\widetilde{M}$ は $\widetilde{X} \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ の標準分解で現れる局所マルチンゲールである.

証明. ある $\epsilon = \alpha > 0$ に対し主張が成立しないと仮定して矛盾を導く. $\delta \in (0, \alpha/4)$ を任意に取り, 固定する. 命題 3.77 より, ある $c_0 > 0$ が存在し, 任意の $c \geq c_0$ および $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{\tau_c^n < \infty\} = \mathbb{P}\{(M^n)_\infty^* > c\} \leq \delta^2 \tag{3.82}$$

が成立する. 今, 背理法の仮定より, ある $c \geq c_0$ および convex combination $\widetilde{X} = \sum \lambda_i X_c^i$ が存在し, $\mathbb{P}\{\widetilde{M}_\infty^* > \alpha\} > \alpha$ が成立する. すなわち $\rho = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid (\widetilde{M})_t^* > \alpha\}$ と置くと $\mathbb{P}\{\rho < \infty\} > \alpha$ となる. また, 対応する convex combination を $\widetilde{H} = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_c^i,\infty[\![} H^i$ と書くと, $\widetilde{X} = \widetilde{H} \cdot S$ となる.

$F = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_c^i,\infty[\![}$ とし,(可予測) 停止時刻 $\theta = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid F_t > \delta\}$ を考える. F は左連続であることより, $F_\theta \leq \delta$ となる. また, F は増加過程であることに注意して, Chebyshev の不等式より

$$\mathbb{P}\{\theta < \infty\} = \mathbb{P}\{F_\infty > \delta\} \leq \delta^{-1} \sum \lambda_i \mathbb{P}\{\tau_c^i < \infty\} \leq \delta < \alpha/4 \tag{3.83}$$

が成立する.

$\|\sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_\infty^*\|_{L^2} < \infty$ に注意して, $N \geq 2$ で $\mathbb{P}\{\sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_\infty^* > N-1\} < \alpha/4$ なるものが取れる. このとき $\sigma = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_t^* > N-1\}$ と置くと, $\mathbb{P}\{\sigma < \infty\} < \alpha/4$ となる. さらに各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $H^i \in \mathcal{H}_1$, すなわち $X^i \geq -1$ となることより, $t \leq \theta \wedge \sigma$ に対し

$$2\delta \sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_\infty^* \geq 2F_t \sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_\infty^* \geq \sum \lambda_i \mathbb{1}_{\{t>\tau_c^i\}}(X_t^i - X_{\tau_c^i}^i) \geq -NF_t \geq -N\delta \tag{3.84}$$

が成立する. $\sum \lambda_i \mathbb{1}_{\{t>\tau_c^i\}}(X_t^i - X_{\tau_c^i}^i) = \widetilde{X}_t = (\widetilde{H} \cdot S)_t$ に注意して, $K^\delta = (N\delta)^{-1}\mathbb{1}_{[\![0,\sigma\wedge\theta\wedge\rho]\!]}\widetilde{H}$ と置くと, $K^\delta \cdot S = (N\delta)^{-1}\widetilde{X}^{\sigma\wedge\theta\wedge\rho} \geq -1$, すなわち $K^\delta \in \mathcal{H}_1$ となる. さらに $\|(K^\delta \cdot S)_\infty^*\|_{L^2} \leq \|1 \vee \sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)_\infty^*\|_{L^2} < \infty$ が成立する. ここで右辺は δ に依らない定数であることに注意する. 特に $K^\delta \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ であり, 標準分解は $K^\delta \cdot S = M^\delta + A^\delta$, $M^\delta = (N\delta)^{-1}\mathbb{1}_{[\![0,\sigma\wedge\theta\wedge\rho]\!]} \cdot \widetilde{M}$, $A^\delta = (N\delta)^{-1}\mathbb{1}_{[\![0,\sigma\wedge\theta\wedge\rho]\!]} \cdot \widetilde{A}$ となる. ここで

$$\mathbb{P}\{(M^\delta)_\infty^* \geq \alpha(N\delta)^{-1}\} \geq \mathbb{P}\{\rho < \infty,\ \sigma = \infty,\ \theta = \infty\} \geq \alpha/2 \tag{3.85}$$

となるが, $\delta \downarrow 0$ とすると命題 3.77 に矛盾する. □

命題 3.79. ($NUPBR$) を仮定する. このとき任意の $\delta > 0$ に対し, ある $c_0 > 0$ が存在し, 任意の $c \geq c_0$ および任意の convex comvination $\widetilde{X} = \sum \lambda_i X_c^i$ に対し $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}^*[\widetilde{M}] \leq \delta$ が成立する.

証明. $\epsilon > 0$ を任意に取り, 固定する. $c_0 > 0$ を命題 3.78 のものとする. すなわち, 任意の $c \geq c_0$ および任意の convex comvination $\widetilde{X} = \sum \lambda_i X_c^i$ に対し $\mathbb{P}\{\widetilde{M}_\infty^* > \epsilon\} \leq \epsilon$ となる. したがって, $\rho = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \widetilde{M}_t^* > \epsilon\}$ と置くと $\mathbb{P}\{\rho < \infty\} \leq \epsilon$ が成立する. 今, 命題 3.77

より $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}\{\tau_c^n<\infty\}\xrightarrow{c\to\infty}0$ となることに注意して, $c\geq c_0$ が十分大きいとき, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\|(X_c^n)_\infty^*\|_{L^2}\leq 2\|(X^n)_\infty^*\mathbb{1}_{\{\tau_c^n<\infty\}}\|_{L^2}\leq\epsilon/6 \tag{3.86}$$

となる. ゆえに, $c_0>0$ を大きく取り直すことにより, 任意の $c\geq c_0$ および任意の convex comvination $\widetilde{X}=\sum\lambda_i X_c^i$ に対し $\|\widetilde{X}_\infty^*\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}\leq\epsilon/6$ となる. したがってこのとき補題 3.76 より $\|(\Delta\widetilde{M})_\infty^*\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}\leq\epsilon$ が成立する. $|H|\leq 1$ なる可予測過程 H を任意に取る. $\widetilde{M}^\rho$ が二乗可積分マルチンゲールであることより

$$\|(H\cdot\widetilde{M})_\rho\|_{L^2}=\|(H^2\cdot[\widetilde{M},\widetilde{M}])_\rho\|_{L^1}^{1/2}\leq\|[\widetilde{M},\widetilde{M}]_\rho\|_{L^1}^{1/2}=\|\widetilde{M}_\rho\|_{L^2}\leq 2\epsilon \tag{3.87}$$

が成立する. これと Chebyshev の不等式および Doob の不等式より

$$\mathbb{P}\{(H\cdot\widetilde{M})_\rho^*\geq\sqrt{\epsilon}\}\leq\epsilon^{-1}\|(H\cdot\widetilde{M})_\rho^*\|_{L^2}^2\leq 4\epsilon^{-1}\|(H\cdot\widetilde{M})_\rho\|_{L^2}^2\leq 16\epsilon, \tag{3.88}$$

したがって

$$\mathbb{P}\{(H\cdot\widetilde{M})_\infty^*\geq\sqrt{\epsilon}\}\leq\mathbb{P}\{(H\cdot\widetilde{M})_\rho^*\geq\sqrt{\epsilon}\}+\mathbb{P}\{\rho<\infty\}\leq 17\epsilon \tag{3.89}$$

となる. H は $|H|\leq 1$ なる任意の可予測過程だったので, 主張が成立する. □

次の補題は一般の Hilbert 空間において成立する.

補題 3.80. (*i*) Hilbert 空間 H の任意の有界列 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset H$ に対し, forward convex combination $g_n\in\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\cdots)$, $n\in\mathbb{N}$ で収束列となるものが存在する.

(*ii*) Hilbert 空間 H の二重列 $(f_k^n)_{n,k\in\mathbb{N}}$ で, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_k^n\|_H<\infty$ となるものを考える. このときある convex weight $\Lambda^n=(\lambda_j^n)_{j\leq N_n}$, $n\in\mathbb{N}$ が存在し, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$g_k^n=\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n f_k^{n+j},\ n\in\mathbb{N} \tag{3.90}$$

が ($n\in\mathbb{N}$ の列として) 収束列となる.

証明. (*i*) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $K^n=\overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|_H}(f_n,f_{n+1},\cdots)$ と置く. K^n は $\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\cdots)$ の弱位相による閉包と一致し, ノルム有界性より弱コンパクトとなる. ゆえに, $K^1\supset K^2\supset\cdots$ であることに注意して, ある $g\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}K^n$ が存在する. したがって各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\|g_n-g\|_H\leq 1/n$ なる $g_n\in\mathrm{conv}(f_n,f_{n+1},\cdots)$ が存在する. この $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は求める収束列である.

(*ii*)

$$K=\left\{F=(f_k)\mid f_k\in H,\ k\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^\infty\|f_k\|_H<\infty\right\} \tag{3.91}$$

と置くと, K はノルム $\|F\|_K=\sum_{k=1}^\infty\|f_k\|_H$ により Hilbert 空間となる. 今, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $C_k=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_k^n\|_H\infty$ とし, K の列 $(F^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $F^n=(\frac{1}{2^kC_k}f_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$, $n\in\mathbb{N}$ により定義する. このとき明らかに $(F^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は K の有界列, したがって前半の議論よりある convex weight $\Lambda^n=(\lambda_j^n)_{j\leq N_n}$ が存在し,

$$G^n=\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n F^{n+j}=(g_k^n)_{k\in\mathbb{N}}=\left(\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n f_k^{n+j}\right)_{k\in\mathbb{N}},\ n\in\mathbb{N} \tag{3.92}$$

が K の収束列となる. 特に各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $(g_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は H の収束列となる.

□

命題 3.81. $(NUPBR)$ を仮定する. このとき $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $\widetilde{X}^n\in\mathrm{conv}(X^n,X^{n+1},\cdots)$ で, $(\widetilde{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が強 Émery 位相で Cauchy 列となるものが存在する. ここで $\widetilde{M}^n$ は $\widetilde{X}^n\in\mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$ の標準分解によるマルチンゲール項である.

証明. 命題 3.79 より, 各 $k\in\mathbb{N}$ について, 任意の convex combination $\widetilde{X}=\sum\lambda_i X^i_{c_k}$ に対し $\|\widetilde{M}\|_{\mathcal{S}}\leq k^{-1}$ が成立するような $c_k>0$ が存在する. 今, $f_k^n=\mathbb{1}_{[\![0,\tau^n_{c_k}]\!]}\cdot M^n$ と置く. $\|(\mathbb{1}_{[\![0,\tau^n_{c_k}]\!]}\cdot M^n)_\infty\|\leq c_k+6\lambda<\infty$ より, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し $(f_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}^2$ (二乗可積分マルチンゲールの Hilbert 空間) の有界列とみなせる. したがって補題 3.80 より, ある convex weight $\Lambda^n=(\lambda_j^n)_{j\leq N_n}$ で, 全ての $k\in\mathbb{N}$ に対し,

$$N_k^n=\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n\mathbb{1}_{[\![0,\tau^{n+j}_{c_k}]\!]}\cdot M^{n+j} \tag{3.93}$$

で定義される列 $(N_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathcal{H}^2$ の収束列となるものが存在する. 特に各 $(N_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は強 Émery 位相で Cauchy 列となる. 今, $c_k>0$ の取り方より, 対応する convex combination $\widetilde{M}_k^n=\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n\mathbb{1}_{[\![\tau^n_{c_k},\infty[\![}\cdot M^{n+j}$ について, 任意の $n,k\in\mathbb{N}$ に対し $\|\widetilde{M}_k^n\|_{\mathcal{S}}\leq k^{-1}$ が成立する.

今,

$$\widetilde{X}^n=\sum_{j=0}^{N_n}\lambda_j^n X^{n+j},\ n\in\mathbb{N}\in\mathrm{conv}(X^n,X^{n+1},\cdots) \tag{3.94}$$

とし, 標準分解 $\widetilde{X}^n=\widetilde{M}^n+\widetilde{A}^n$ を考える. このとき任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し $\widetilde{M}^n=N_k^n+\widetilde{M}_k^n$, ゆえに

$$\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[\widetilde{M}^n-\widetilde{M}^m]\leq\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[N_k^n-N_k^m]+\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[\widetilde{M}_k^n]+\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[\widetilde{M}_k^n]\leq\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[N_k^n-N_k^m]+2k^{-1}\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}2k^{-1} \tag{3.95}$$

となる. したがって

$$\mathbb{D}^*_{\mathcal{S}}[\widetilde{M}^n-\widetilde{M}^m]\overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow}0, \tag{3.96}$$

すなわち $(\widetilde{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は強 Émery 位相で Cauchy 列となる. □

これまでの議論で, $(NUPBR)$ の仮定の下,

- $X^n=H^n\cdot S,\ n\in\mathbb{N}$;
- $\|\sup_{n\in\mathbb{N}}(X^n)^*_\infty\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})}<\infty$;
- $f_n=X^n_\infty\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f_0\in\mathcal{D}_h^{\max}$ a.s.

となるような投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}_1$ に対し, ある forward convex combination $\widetilde{H}^n\in\mathrm{conv}(H^n,H^{n+1},\cdots)\subset\mathcal{H}_1,\ n\in\mathbb{N}$ で, 対応する $\widetilde{X}^n=\widetilde{M}^n+\widetilde{A}^n\in\mathcal{S}_{\mathrm{sp}},\ n\in\mathbb{N}$ の局所マルチンゲール項の列 $(\widetilde{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が強 Émery 位相で Cauchy 列となるものが存在することが示せた. このとき $(\widetilde{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ も強 Émery 位相で Cauchy 列となることが示せれば, $(\widetilde{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ も強 Émery 位相で Cauchy 列となり, 前半の注意より示すべき主張の証明が完了する.

今, 明らかに $\widetilde{X}^n_\infty\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}f_0$ a.s. が成立することに注意する.

命題 3.82. S を d 次元マーケット, $h \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする. $\mathcal{D}_h^{\max} \neq \phi$ と仮定する. 列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ が次の 3 条件を満たすとする;

(i) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $X^n = H^n \cdot S \in \mathcal{S}_{\mathrm{sp}}$, 標準分解を $X^n = M^n + A^n$ とする;

(ii) $X_\infty^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exists f_0 \in \mathcal{D}_h^{\max}$ a.s.;

(iii) $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が強 Émery 位相で Cauchy 列である.

このとき $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は強 Émery 位相で Cauchy 列となる.

証明. $\mathrm{Var}(A^n - A^m)_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ を示せば, 補題 3.27 より $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が強 Émery 位相で Cauchy 列となる. そこで, $\mathrm{Var}(A^n - A^m)_\infty$ が $n, m \to \infty$ で 0 に確率収束しないと仮定し, 矛盾を導く (すなわち命題の主張より強い収束を示す).

このときある $i_k,\ j_k \uparrow \infty$ および $\gamma > 0$ が存在し, 全ての $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{\mathrm{Var}(A^{i_k} + A^{j_k})_\infty \geq 2\gamma\} \geq 2\gamma \tag{3.97}$$

が成立する. 各 $k \in \mathbb{N}$ を固定する. ある可予測増加過程 B^k および可予測過程 $r^k \in L_{\mathrm{var}}(B^k)$ が存在し, $A^{i_k} - A^{j_k} = r^k \cdot B^k$ と書ける. $\Gamma_k = \{r^k \geq 0\}$ と置く. このとき Γ_k は可予測であり, $\mathrm{Var}(A^{i_k} - A^{j_k}) = (r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k}) \cdot B^k - (r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k^c}) \cdot B^k$ が成立する. 必要なら添え字を入れ替えることにより,

$$\mathbb{P}\{((r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k}) \cdot B^k)_\infty \geq \gamma\} \geq \gamma \tag{3.98}$$

と仮定して良い.

今, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\overline{H}^k = \mathbb{1}_{\Gamma_k} H^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} H^{j_k}$ とし,

$$\overline{X}^k = \overline{H}^k \cdot S = \mathbb{1}_{\Gamma_k} \cdot X^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \cdot X^{j_k} \tag{3.99}$$

$$\overline{M}^k = \mathbb{1}_{\Gamma_k} \cdot M^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \cdot M^{j_k} \tag{3.100}$$

と置く. このとき, 仮定 (iii) より

$$\overline{M}^k - M^{i_k} = \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \cdot (M^{j_k} - M^{i_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0, \tag{3.101}$$

$$\overline{M}^k - M^{j_k} = \mathbb{1}_{\Gamma_k} \cdot (M^{i_k} - M^{j_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}^*} 0 \tag{3.102}$$

となる. 特に $\overline{M}^k - M^{i_k} \vee M^{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathrm{up}} 0$ が成立する. ゆえに, $\alpha_k \downarrow 0$ なる正数列 $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在し,

$$\mathbb{P}\{(\overline{M}^k - M^{i_k} \vee M^{j_k})_\infty^* \geq \alpha_k\} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.103}$$

となる. そこで, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し停止時刻

$$\sigma_k = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \overline{M}_t^k < M_t^{i_k} \vee M_t^{j_k} - \alpha_k\} \tag{3.104}$$

を考えると, $\mathbb{P}\{\sigma_k < \infty\} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ が成立する.

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $L^k = \frac{1}{1+\alpha_k} \mathbb{1}_{[\![0,\sigma_k]\!]} \overline{H}^k$ と置く. このとき $L^k \in \mathcal{H}_1$ となる. 実際, $X^n \geq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ に注意して, $t \in [0, \sigma_k)$ のとき

$$
\begin{aligned}
(1+\alpha_k)(L^k \cdot S)_t &= (\mathbb{1}_{\Gamma_k} \cdot X^{i_k})_t + (\mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \cdot X^{j_k})_t \\
&= \overline{M}_t^k + (\mathbb{1}_{\Gamma_k} \cdot A^{i_k})_t + (\mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \cdot A^{j_k})_t \\
&\geq M_t^{i_k} \vee M_t^{j_k} - \alpha_k + A^{i_k} \wedge A^{j_k} \\
&\geq (M_t^{i_k} + A_t^{i_k}) \wedge (M_t^{j_k} + A_t^{j_k}) - \alpha_k \\
&= X_t^{i_k} \vee X_t^{j_k} - \alpha_k \\
&\geq \mathbb{1}_{\Gamma_k} X_t^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} X_t^{j_k} - \alpha_k \\
&\geq -(1+\alpha_k)
\end{aligned} \tag{3.105}
$$

となり, かつ

$$
(1+\alpha_k)\Delta(L^k \cdot S)_{\sigma_k} = \mathbb{1}_{\Gamma_k} \Delta X_{\sigma_k}^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} \Delta X_{\sigma_k}^{j_k}, \tag{3.106}
$$

すなわち

$$
(1+\alpha_k)(L^K \cdot S)_{\sigma_k} \geq \mathbb{1}_{\Gamma_k} X_{\sigma_k}^{i_k} + \mathbb{1}_{\Gamma_k^c} X^{j_k} - \alpha_k \geq -(1+\alpha_k) \tag{3.107}
$$

となる. さらに,

$$
(L^k \cdot S)_\infty = \frac{1}{1+\alpha_k} X_{\sigma_k}^{j_k} + \frac{1}{1+\alpha_k} (\mathbb{1}_{[\![0,\sigma_k]\!] \cap \Gamma_k} \cdot (M^{i_k} - M^{j_k}))_\infty + \xi_k \tag{3.108}
$$

が成立する. ただし $\xi_k = \frac{1}{a+\alpha_k} (\mathbb{1}_{[\![0,\sigma_k]\!] \cap \Gamma_k} \cdot (A^{i_k} - A^{j_k}))_\infty = \frac{1}{1+\alpha_k} ((r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k}) \cdot B^k)_{\sigma_k}$ である. 仮定 (ii) および $\mathbb{P}\{\sigma_k < \infty\} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ より,

$$
X_{\sigma_k}^{j_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}} f_0 \tag{3.109}
$$

が成立する. また, 仮定 (iii) および補題 3.26 より

$$
\mathbb{1}_{[\![0,\sigma_k]\!] \cap \Gamma_k} \cdot (M^{i_k} - M^{j_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{\mathrm{up}} 0 \tag{3.110}
$$

が成立する. $\alpha_k \downarrow 0$ に注意して, 部分列を考えることにより式 (3.108) の右辺第一, 第二項は $k \to \infty$ で a.s. で 0 に収束するとしてよい. さらに, 各 ξ_k は非負確率変数であり, 十分大きい $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\xi_k \geq \frac{\gamma}{2}\right\} &\geq \mathbb{P}\{((r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k}) \cdot B^k)_{\sigma_k} \geq \gamma\} \\
&\geq \mathbb{P}\{((r^k \mathbb{1}_{\Gamma_k}) \cdot B^k)_\infty \geq \gamma\} - \mathbb{P}\{\sigma_k < \infty\} \\
&\geq \frac{\gamma}{2} > 0
\end{aligned} \tag{3.111}
$$

が成立する. したがって, 補題 3.55 より, $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $\widetilde{\xi}_k \in \mathrm{conv}(\xi_k, \xi_{k+1}, \cdots)$, $k \in \mathbb{N}$ で, ある $\eta \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \setminus \{0\}$ に a.s. で収束するものが存在する. したがって, 対応する $(L^k)_{k\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination を $(\widetilde{L}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ と書くと, $(\widetilde{L}^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$ かつ

$$
(\widetilde{L}^k \cdot S)_\infty \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0 + \eta \geq h \text{ a.s.} \tag{3.112}
$$

となる. したがって $f_0 + \eta \in \mathcal{D}_h$ となるが, $\mathbb{P}\{\eta > 0\} > 0$ より, $f_0 \in \mathcal{D}_h^{\max}$ であることに矛盾する. したがって, $\mathrm{Var}(A^n - A^m)_\infty \xrightarrow[n,m\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, 特に $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は強 Émery 位相で Cauchy 列となる. □

第II部

Large financial market

第I部で議論したマーケットは有限個の証券を仮定した有限次元モデルであった. 第II部では, (可算) 無限個の証券を仮定したマーケットモデルを考える. 証券数が非可算無限個であるという設定は金利市場や商品先物市場のモデル化で現れる. これらのマーケットでは, 投資家はボンド (満期に現金や商品を授受する契約) を取引することによって投資を行う. 各満期のボンドの現在価格は様々な経済的要因によりランダムに変動すると考えられる. また, 可算無限個の証券を仮定するモデルは, 保険数学とのつながりの上からも興味深い話題である. そこで無限次元マーケットモデル (large financial market) により無限個の証券の変動をモデル化する方法が一般的である.

4　確率空間の列としての Large financial market model

この節では, [18], [19], [22], [23] を参考に, 異なる確率空間おいて定義された有限次元マーケットの列としての large financial market を考える.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $B^n = (\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, \mathbb{P}^n)$ を通常の条件を満たすフィルトレーション $\mathbb{F}^n = (\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{N}}$ 付きの確率空間とする. また $S^n = (S^n_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ を B^n の上に定義された $d(n)$ 次元セミマルチンゲールとする. ただし, $d(n) \in \mathbb{N}$ とする. 列 $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を **large financial market** と呼び, 各 (B^n, S^n) (有限次元マーケット) を **small market** と呼ぶ.

<u>Notation</u>

- 各 $n \in \mathbb{N}$ および $p \geq 1$ に対し, $L^p(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|_{n,p}$ と書く.
- B^n 上の $d(n)$ 次元可予測過程 H^n で S^n-可積分であるものを small market (B^n, S^n) における投資戦略と呼ぶ.
- H^n を small market (B^n, S^n) における投資戦略とし, $a > 0$ とする. $H^n \cdot S^n \geq -a$ かつ $(H^n \cdot S^n)_\infty \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to\infty}(H^n \cdot S^n)_t$ が $\mathbb{P}^n$-a.s. で存在するとき, H^n は a-admissible であるという. (B^n, S^n) における a-admissible な投資戦略全体の集合を $\mathcal{H}^n$ と書く. また, $\mathcal{H}^n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a>0} \mathcal{H}^n_a$ と定義し, $\mathcal{H}^n$ の元を単に admissible であるという.
- $L^0(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ の凸錐 $\mathcal{K}^n_a$ $(a > 0)$ を

$$\mathcal{K}^n_a \overset{\text{def}}{=} \{(H^n \cdot S^n)_\infty \mid H^n \in \mathcal{H}^n_a\} \tag{4.1}$$

とし, $\mathcal{K}^n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{a>0} \mathcal{K}^n_a$ と定義する. また $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ の凸錐 $\mathcal{C}^n$ を

$$\mathcal{C}^n \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{K}^n - L^0_+(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)) \cap L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) \tag{4.2}$$

と定義する.

- small market (B^n, S^n) における分離測度の集合を

$$\mathcal{M}_s^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q}^n \ll \mathbb{P}^n \mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[f] \leq 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^n\}, \tag{4.3}$$

  同値分離測度の集合を

$$\mathcal{M}_s^{e,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbb{Q}^n \sim \mathbb{P}^n \mid \mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s(S^n, \mathbb{P}^n)\} \tag{4.4}$$

  と定義する. $\mathcal{M}_s^{e,n} \neq \phi$ であるとき, small market (B^n, S^n) は (ESM) を満たすという.

- small market (B^n, S^n) が
  - (i) (NA) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{C}^n \cap L_+^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) = \{0\}$;
  - (ii) (NFL) を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \overline{\mathcal{C}^n}^* \cap L_+^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) = \{0\}$
    ($\overline{\mathcal{C}^n}^*$ は $\mathcal{C}^n$ の $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ における weak*-closure を表す);
  - (iii) $(NFLVR)$ を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \overline{\mathcal{C}^n} \cap L_+^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) = \{0\}$
    ($\overline{\mathcal{C}^n}$ は $\mathcal{C}^n$ の $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ における norm-closure を表す);
  - (iv) $(NUPBR)$ を満たす $\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{K}_1^n$ が $L^0(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$-有界.

- 全ての small market (B^n, S^n) が (NA) (resp. $(NFLVR)$) を満たすとき, large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(NA)_{\text{small}}$ (resp. $(NFLVR)_{\text{small}}$) を満たすという.

この設定の下, 第 I 部で示したことより次がわかる;

命題 4.1. small market (B^n, S^n) に対し,

$$(NFLVR) \Leftrightarrow (NA) + (NUPBR) \tag{4.5}$$

が成立する.

命題 4.2. small market (B^n, S^n) が $(NFLVR)$ を満たすとき, $\mathcal{C}^n$ は $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ において weak*-closed である. したがって Kreps-Yan の定理より

$$(NFLVR) \Leftrightarrow (NFL) \Leftrightarrow (ESM) \tag{4.6}$$

が成立する.

Large financial market の枠組みにおいて無裁定理論を展開する. 後に近似的な無裁定型条件 $(NAA1)$, $(NAA2)$, および $(NAFL)$ を定義する. 有限次元同様にこれらの条件を同値分離測度の列に関する条件として特徴づけたい. そこでまず,(異なる可測空間上の) 確率測度の列について,「一様な」絶対連続性に相当する概念を定義する.

定義 4.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 可測空間 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ 上の二つの確率測度 $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{Q}^n$ を考える. $\mathbb{P}^n(A^n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^n(A^n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となるとき, 列 $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は列 $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に関して **contiguous** であるといい, $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表す. また $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ かつ $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立するとき, $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は **bicontiguous** であるといい, $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd\rhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表す.

contiguity は次の意味で確率測度の一様絶対連続性を表す.

補題 4.4. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 可測空間 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ 上の二つの確率測度 $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{Q}^n$ を考える. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^n \ll \mathbb{P}^n$ と仮定する. このとき次は同値;

(i) $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ および $\mathbb{P}^n(A^n) < \delta$ なる $A^n \in \mathcal{F}^n$ に対し $\mathbb{Q}^n(A^n) < \epsilon$ が成立する.

(iii) $(\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}|\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分である. すなわち

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>M\right\}}\right] = 0 \tag{4.7}$$

が成立する.

証明. $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$
$(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を仮定する. (ii) が成立しないと仮定して矛盾を導く. このときある $\epsilon > 0$ が存在し, $\delta_k \downarrow 0$ なる $\delta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ について,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n_k \in \mathbb{N},\ \exists A^{n_k} \in \mathcal{F}^{n_k} \text{ s.t. } \mathbb{P}^{n_k}(A^{n_k}) < \delta_k \text{ かつ } \mathbb{Q}^{n_k}(A^{n_k}) \geq \epsilon \tag{4.8}$$

が成立する.

- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が有界のとき;

$\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{m_l \mid l = 1, \cdots, N\}$ と置く. 各 $l = 1, \cdots, N$ に対し,$\mathbb{Q}^l$ は $\mathbb{P}^l$ に関し絶対連続であることより, ある $\gamma_l > 0$ が存在し, $\mathbb{P}^l(B^l) < \gamma_l$ なる任意の $B^l \in \mathcal{F}^l$ に対し $\mathbb{Q}^l(B^l) < \epsilon$ が成立する. そこで $\gamma = \min_{l=1,\cdots,N}\gamma_l > 0$ と置くと, (4.8) より, $\delta_k \leq \gamma$ なる $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}^{n_k}(A^{n_k}) < \delta_k \leq \gamma$ かつ $\mathbb{Q}^{n_k}(A^{n_k}) \geq \epsilon$ が成立する. したがってある $l = 1, \cdots, N$ が存在し $\mathbb{P}^l(A^l) < \gamma \leq \gamma_l$ かつ $\mathbb{Q}^l(A^l) \geq \epsilon$ となる. これは γ_l の取り方に矛盾する.

- $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が非有界のとき;

部分列を取ることにより $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ としてよい. (4.8) より $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}^{n_k}(A^{n_k}) = 0$ かつ $\mathbb{Q}^{n_k}(A^{n_k}) \geq \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}$ となるが, これは仮定 $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に矛盾する.
$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$
$\epsilon > 0$ を任意に取る. 仮定 (ii) より, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ および $\mathbb{P}^n(A^n) < \delta$ なる $A^n \in \mathcal{F}^n$ に対し $\mathbb{Q}^n(A^n) < \epsilon$ が成立する. 今, Chebyshev の不等式より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}^n\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} > M\right\} \leq \frac{1}{M}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\right] = \frac{1}{M} \tag{4.9}$$

が成立する. すなわち任意の $M > \frac{1}{\delta}$ に対し $\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}^n\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} > M\right\} < \delta$, したがって

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>M\right\}}\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}^n\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} > M\right\} < \epsilon \tag{4.10}$$

となる. $\epsilon > 0$ は任意だったので, $\lim_{M\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>M\right\}}\right]=0$ が成立する.
$\underline{(iii) \Rightarrow (i)}$
$\mathbb{P}^n(A^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ なる $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ を任意に取る. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ および $M > 0$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}^n(A^n) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{A^n}\right] \\
&\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>M\right\}}\right]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{A^n\cap\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\leq M\right\}}\right] \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>M\right\}}\right]+M\mathbb{P}^n(A^n) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

が成立する. 仮定 (iii) より最右辺第一項は $M > 0$ を大きくすることで任意に小さくできることに注意して, $\mathbb{Q}^n(A^n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となる. したがって $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する. □

4.1 No Asymptotic Arbitrage

Large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ において, 2 種類の近似型の裁定機会を考える.

定義 4.5. 許容的な投資戦略の列 $H^n \in \mathcal{H}^n$, $n \in \mathbb{N}$ を考える.

(i) $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の 2 条件を満たすとき, **asymptotic arbitrage of the first kind** $(AA1)$ であるという;

- $\epsilon_n \downarrow 0$ なる正数列 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n \in \mathcal{H}^n_{\epsilon_n}$ が成立する;
- $c_n \uparrow \infty$ なる正数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty \geq c_n\} > 0$ が成立する.

(ii) $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の 2 条件を満たすとき, **asymptotic arbitrage of the second kind** $(AA2)$ であるという;

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $H^n \in \mathcal{H}^n_1$ が成立する;
- ある $c > 0$ が存在し, $\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty \geq c\} = 1$ が成立する.

$(AA1)$ (resp. $(AA2)$) が存在しないとき, large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(NAA1)$ (resp. $(NAA2)$) を満たすという.

注意 . $(AA1)$ および $(AA2)$ は次のように解釈することができる;

- $\underline{(AA1)}$
  任意に小さいリスク ($H^n \in \mathcal{H}^n_{\epsilon_n}$, $\epsilon_n \downarrow 0$) で, 無限に大きい利益 ($c_n \uparrow \infty$) を正の確率で得られる ($\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty \geq c_n\} > 0$) ような機会.

- $\underline{(AA2)}$
  一様なリスク ($H^n \in \mathcal{H}^n_1$) で, ある正の富 ($c > 0$) を任意に 1 に近い確率で得られる ($\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty \geq c_n\} > 0$) ような機会.

Large financial market が $(NFLVR)_{\text{small}}$ を満たすと仮定したとき, asymptotic arbitrage は同値分離測度の列と $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ についての contiguity により特徴付けられる.

定理 4.6 (Klein-Schachermayer, 1997)**.** Large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NFLVR)_{\text{small}}$ を満たすと仮定する. このとき次は同値;

(i) $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NAA1)$ を満たす;

(ii) ある同値分離測度の列 $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する.

定理 4.7 (Klein-Schachermayer, 1997)**.** Large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NFLVR)_{\text{small}}$ を満たすと仮定する. このとき次は同値;

(i) $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NAA2)$ を満たす;

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ および同値分離測度の列 $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ が存在し, $\mathbb{P}^n(A^n) < \delta$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^n(A^n) < \epsilon$ が成立する.

注意 . 定理 4.7 についての主張は

$$\exists(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ with } \mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n},\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \cdots \tag{4.1}$$

($\Leftrightarrow (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$) とは異なることに注意する. 実際, 次の反例が存在する;

例 4.8. $\exists(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$, $\mathbb{F}^n = (\mathcal{F}_0^n, \mathcal{F}_1^n)$, $\mathbb{R}^n$-値適合過程 $S^n = (S_0^n, S_1^n)$, $n \in \mathbb{N}$ s.t.

(i) $(NAA2)$ 成立;

(ii) 任意の列 $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \not\!\lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ となる.

注意 . もし各 small market (B^n, S^n) において同値分離測度 $\mathbb{Q}^n$ が一意的に存在すれば,

$$(NAA2) \iff (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \tag{4.2}$$

が成立する.

4.1.1 定理 4.6 の証明

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$

仮定 (ii) より, ある同値分離測度の列 $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ で $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ となるものが存在する. $(AA1)$ $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在したと仮定して矛盾を導く;

- $\epsilon_n \downarrow 0$ なる正数列 $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^n$ が成立する;
- $c_n \uparrow \infty$ なる正数列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty \geq c_n\} > 0$ が成立する.

各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^{e,n}$ より $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n\cdot S^n)_\infty]\le 0$ が成立する. これと $H^n\in\mathcal{H}^n_{\epsilon_n}$ に注意して

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n\cdot S^n)^+_\infty]\le\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n\cdot S^n)^-_\infty]\le\epsilon_n, \tag{4.3}$$

ゆえに $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[|(H^n\cdot S^n)_\infty|]\le 2\epsilon_n$ が成立する. したがって, Chebyshev の不等式より

$$\mathbb{Q}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty\ge c_n\}\le\frac{1}{c_n}\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}^n}[|(H^n\cdot S^n)_\infty|]\le\frac{\epsilon_n}{c_n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{4.4}$$

が成立する. しかし

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}^n\{(H^n\cdot S^n)_\infty\ge c_n\}>0 \tag{4.5}$$

より, $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に矛盾する.

□

<u>$(i)\Rightarrow(ii)$</u>

各 $n\in\mathbb{N}$ について汎弱位相を入れた $L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$ における Hahn-Banach の分離定理を用いることで, (ii) の列 $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を構成する. 各 $M\in\mathbb{R}_+$ に対し

$$D^n_M\overset{\text{def}}{=}\{h^n\in L^\infty_+(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)\mid\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[h^n]=1\text{ かつ }\|h^n\|_{n,\infty}\le M\} \tag{4.6}$$

と置く. Alaoglu の定理より各 D^n_M は $L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$ の weak*-位相でコンパクトな凸集合である. 次の補題は Hahn-Banach の分離定理を用いる根拠となる. ただしこの補題においては仮定 $(NFLVR)_{\mathrm{small}}$ は不要であることに注意する.

補題 4.9. Large financial market $(B^n,S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NA)_{\mathrm{small}}$ および $(NAA1)$ を満たすと仮定する. このとき任意の $M\ge1$ に対しある $\gamma_M>0$ が存在し, 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathrm{dist}_{\|\cdot\|_{n,\infty}}(\mathcal{C}^n,D^n_M)\ge2\gamma_M \tag{4.7}$$

が成立する.

証明. 主張を否定し矛盾を導く ($(AA1)$ を構成する). このときある $M_0\ge1$ および列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が存在し, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathrm{dist}_{\|\cdot\|_{n_k,\infty}}(\mathcal{C}^{n_k},D^{n_k}_{M_0})<\frac{1}{4k^2} \tag{4.8}$$

が成立する. したがって各 $k\in\mathbb{N}$ に対しある $H^{n_k}\in\mathcal{H}^{n_k}$, $f^{n_k}\in L^0_+(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$, $h^{n_k}\in D^{n_k}_{M_0}$ が存在し, $\|(H^{n_k}\cdot S^{n_k})_\infty-f^{n_k}-h^{n_k}\|_{n_k,\infty}<\frac{1}{4k^2}$, すなわち $\mathbb{P}^{n_k}$-a.s. で

$$-\frac{1}{4k^2}+f^{n_k}+h^{n_k}<(H^{n_k}\cdot S^{n_k})_\infty<\frac{1}{4k^2}+f^{n_k}+h^{n_k} \tag{4.9}$$

が成立する. $f^{n_k},h^{n_k}\ge0$ $\mathbb{P}^{n_k}$-a.s. より, 特に

$$(H^{n_k}\cdot S^{n_k})_\infty\ge-\frac{1}{4k^2}\ \mathbb{P}^{n_k}\text{-a.s.} \tag{4.10}$$

となる. 一方 $h^{n_k}\in D^{n_k}_{M_0}$ より

$$\begin{aligned}1=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n_k}}[h^{n_k}]&=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n_k}}[h^{n_k}\mathbb{1}_{\{h^{n_k}\ge1/2\}}]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n_k}}[h^{n_k}\mathbb{1}_{\{h^{n_k}<1/2\}}]\\&\le M_0\mathbb{P}^{n_k}\left\{h^{n_k}\ge\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{2}\end{aligned} \tag{4.11}$$

が成立する. したがって $\mathbb{P}^{n_k}\{h^{n_k} \geq \frac{1}{2}\} \geq \frac{1}{2M_0}$, ゆえに $\mathbb{P}^{n_k}\{(H^{n_k} \cdot S^{n_k})_\infty \geq \frac{1}{4}\} \geq \frac{1}{2M_0}$ となる.

今, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\widetilde{H}^{n_k} = 4kH^{n_k}$ と置くと, $\widetilde{H}^{n_k} \in \mathcal{H}^{n_k}$ かつ $(\widetilde{H}^{n_k} \cdot S^{n_k})_\infty \geq -\frac{1}{k}$ となる. 仮定 $(NA)_{\text{small}}$ より各 small market (B^{n_k}, S^{n_k}) は (NA) を満たすから, 補題 3.57 より $\widetilde{H}^{n_k} \in \mathcal{H}^{n_k}_{1/k}$ となる. さらに

$$\mathbb{P}^{n_k}\{(\widetilde{H}^{n_k} \cdot S^{n_k})_\infty \geq k\} \geq \frac{1}{2M_0} \tag{4.12}$$

が成立する. したがって $(\widetilde{H}^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は $(AA1)$ をなし, 仮定 $(NAA1)$ に矛盾する. □

$(i) \Rightarrow (ii)$ を示す. Large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NFLVR)_{\text{small}}$ および $(NAA1)$ を満たすと仮定する. $M \geq 1$ を任意に取り固定する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, small market (B^n, S^n) は $(NFLVR)$ を満たすので, 命題 4.2 より各 $\mathcal{C}^n$ は $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ の weak*-closed な凸錐である. また D^n_M は $L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ の weak*-compact な凸集合であるから, 補題 4.9 に注意して, Hahn-Banach の分離定理 (閉凸とコンパクト凸の強分離) より, $\|g^{n,M}\|_{n,p} = 1$ なる $g^{n,M} \in L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ で

$$\sup_{f^n\in\mathcal{C}^n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} f^n] \leq \inf_{h^n\in D^{n,M}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} h^n] - \gamma_M \tag{4.13}$$

となるものが存在する. $\mathcal{C}^n$ が錐であることより, (左辺) $= 0$ となる. また $-L^\infty_+(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n) \subset \mathcal{C}^n$ より $g^{n,M} \geq 0$ $\mathbb{P}^n$-a.s. となる. さらに任意の $f^n \in \mathcal{C}^n$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} f^n] \leq 0$ が成立する. したがって, $g^{n,M}$ は ($\mathbb{P}^n$ に関する Radon-Nikodym density とみなすことで) $\mathcal{M}^n_s$ の元となる (同値測度とは限らないことに注意). さらに, 次が成立する;

$$\mathbb{P}^n\{g^{n,M} < \gamma_M\} < \frac{1}{M},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

実際, もし $p^n = \mathbb{P}^n\{g^{n,M} < \gamma_M\} \geq \frac{1}{M}$ とすると, $h^n = \frac{1}{p^n} \mathbb{1}_{\{g^{n,M}<\gamma_M\}} \in D^n_M$ となる. このとき $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} h^n] \geq \gamma_M$ が成立することに注意して,

$$\gamma_M \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} h^n] = \frac{1}{p^n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^{n,M} \mathbb{1}_{\{g^{n,M}<\gamma_M\}}] < \gamma_M \tag{4.15}$$

となり, 矛盾が生じる.

今, 各 $n \in \mathbb{N}$ および $M \in \mathbb{N}$ に対し, $g^{n,M} \in \mathcal{M}^n_s$, $\gamma_M > 0$ を上で構成したものとする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$G^n = \sum_{M=1}^{\infty} 2^{-M} g^{n,M} \tag{4.16}$$

と置く. 右辺は $L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$-ノルムで収束する. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[G^n] = 1$ に注意して, 確率測度 $\mathbb{Q}^n \ll \mathbb{P}^n$ を $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} = G^n$ により定義する. 明らかに $\mathcal{M}^n_s$ は $L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$-ノルムで閉凸であることより, $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}^n_s$ となる. さらに $\{G^n = 0\} \subset \bigcap_{M=1}^\infty \{g^{n,M} < \gamma_M\}$ および $\lim_{M\to\infty} \mathbb{P}^n\{g^{n,M} < \gamma_M\} = 0$ より, $G^n > 0$ $\mathbb{P}^n$-a.s., したがって $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}^{e,n}_s$ となる.

上で構成した $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立することを示す. 補題 4.4 より, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在し, $\mathbb{Q}^n(A^n) < \delta$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}^n(A^n) < \epsilon$ となることを示せばよい. $\epsilon > 0$ を任意に取り固定する. $M^{-1} < \frac{\epsilon}{2}$ なる $M \in \mathbb{N}$

および $0 < \delta < 2^{-M}\gamma_M \frac{\epsilon}{2}$ を取る. このとき $\mathbb{Q}^n(A^n) < \delta$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}^n(A^n) = \mathbb{P}^n(A^n \cap \{g^{n,M} < \gamma_M\}) + \mathbb{P}^n(A^n \cap \{g^{n,M} \geq \gamma_M\}), \tag{4.17}$$

$$(\text{右辺第一項}) \leq \mathbb{P}^n\{g^{n,M} < \gamma_M\} < M^{-1} < \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺第二項}) &\leq \mathbb{P}^n(A^n \cap \{G^n \geq 2^{-M}\gamma_M\}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[\frac{1}{G^n}\mathbb{1}_{A^n \cap \{G^n \geq 2^{-M}\gamma_M\}}\right] \\ &\leq 2^M \gamma_M^{-1} \mathbb{Q}^n(A^n) \\ &< 2^M \gamma_M^{-1} \delta \\ &< \frac{\epsilon}{2},\end{aligned} \tag{4.19}$$

したがって $\mathbb{P}^n(A^n) < \epsilon$ となる. ゆえに $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する.

□

4.1.2 定理 4.7 の証明

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$

$(AA2)$ が存在したと仮定して矛盾を導く;

- 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $H^n \in \mathcal{H}_1^n$ が成立する;
- ある $c > 0$ が存在し, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty \geq c\} = 1$ が成立する.

今, $\epsilon > 0$ を十分小さく取り, $-\epsilon + c(1-\epsilon) > 0$ とする. 仮定 (ii) より, ある列 $\mathbb{Q}^n = \mathbb{Q}^n(\epsilon) \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ および $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ が存在し, $\mathbb{P}^n(A^n) < \delta$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}^n(A^n) < \epsilon$ が成立する. この $\delta > 0$ に対し, 十分大きい $n \in \mathbb{N}$ について $\mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty < c\} < \delta$, したがって $\mathbb{Q}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty < c\} < \epsilon$ が成立する. しかしこのとき

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n \cdot S^n)_\infty] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n \cdot S^n)_\infty \mathbb{1}_{\{(H^n\cdot S^n)_\infty < c\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n \cdot S^n)_\infty \mathbb{1}_{\{(H^n\cdot S^n)_\infty \geq c\}}], \tag{4.20}$$

$$(\text{右辺第一項}) \geq -\mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty < c\} \geq -\epsilon, \tag{4.21}$$

$$(\text{右辺第二項}) \geq c\mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_\infty \geq c\} \geq c(1-\epsilon), \tag{4.22}$$

すなわち $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[(H^n \cdot S^n)_\infty] \geq -\epsilon + c(1-\epsilon) > 0$ となり, $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$ であることに矛盾する.

□

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$

(ii) が成立しないと仮定し矛盾を導く ($(AA2)$ を構成する). このときある $0 < \epsilon < 1$ が存在し, 任意の $\delta > 0$ に対しある $n = n(\delta) \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$ に対し

$$\mathbb{P}^n(A^n) < \delta \text{ かつ } \mathbb{Q}^n(A^n) \geq \epsilon \tag{4.23}$$

となる $A^n = A^{n(\delta)}(\delta, \mathbb{Q}^{n(\delta)}) \in \mathcal{F}^n$ が取れる. この $0 < \epsilon < 1$ を固定し, $\delta_k \downarrow 0$ に対応する $n_k = n_k(\delta) \in \mathbb{N}$ を取る. このとき $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は非有界である. 実際, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が有界であると仮定すると, $\Lambda = \{k \in \mathbb{N} \mid n_k = m\}$ が無限集合となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき任意に取った $\mathbb{Q}^m \in \mathcal{M}_s^{e,m}$ に対しある列 $A^{m,k} = A^{m,k}(\delta_k, \mathbb{Q}^m) \in \mathcal{F}^m$ が存在し, $\mathbb{P}^m(A^{m,k}) < \delta_k \downarrow 0$ かつ $\mathbb{Q}^m(A^{m,k}) \geq \epsilon > 0,\ \forall k \in \Lambda$ となるが, これは $\mathbb{P}^m \sim \mathbb{Q}^m$ であることに矛盾する. したがって $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は非有界であり, 部分列を考えることにより $n_k \uparrow \infty$ と仮定して良い.

各 $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{cases} H^{n_k} \in \mathcal{H}_1^{n_k} \text{ かつ} \\ \mathbb{P}^{n_k}\{(H^{n_k} \cdot S^{n_k})_\infty \geq \frac{\epsilon}{4}\} \geq 1 - \frac{4\delta_k}{\epsilon} \end{cases} \tag{4.24}$$

なる H^{n_k} を構成する. このとき, $n_k \uparrow \infty$ に注意して, $(H^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は $(AA2)$ をなす. 以下, しばらく各 $k \in \mathbb{N}$ を固定し, 添え字 n_k を省略する. 弱位相を入れた $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における Hahn-Banach の分離定理を用いることにより, 目標の H を構成する (定理 4.6, $(i) \Rightarrow (ii)$ の証明とは逆向きの双対).

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in L_+^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \|g\|_1 = 1 \text{ かつ } g \leq \frac{\epsilon}{4\delta} \right\} \tag{4.25}$$

と置く. このとき Alaoglu の定理より Γ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分集合として weak*-compact であり, 自然な埋め込み $(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \text{weak}^*) \hookrightarrow (L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \text{weak})$ は明らかに連続であるので, 結局 Γ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak-compact な凸集合となる. また, $\widehat{\mathcal{M}_s}$ を $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_s^{n_k}$ が生成する凸集合 (すなわち $\mathcal{M}_s$ を含む最小の凸集合) とする. このとき

$$\widehat{\mathcal{M}_s} = \{g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mid \mathbb{E}_\mathbb{P}[gh] \leq 0,\ \forall h \in \mathcal{C}\} = \mathcal{C}^\circ \tag{4.26}$$

と書ける ($\mathcal{C}^\circ$ は凸錐 $\mathcal{C}$ の双対 $(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ に関する極集合を表す). 明らかに $\widehat{\mathcal{M}_s}$ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-ノルムで閉な凸錐, したがって $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の弱位相で閉である ($\widehat{\mathcal{M}_s}$ は凸錐 $\mathcal{C}$ の極集合である).

補題 4.10.

$$\mathrm{dist}_{\|\cdot\|_1}(\Gamma, \mathrm{cone}(\mathcal{M}_s)) > \frac{\epsilon}{4}. \tag{4.27}$$

証明. 任意の $\lambda > 0$ に対し $\mathrm{dist}(\Gamma, \gamma\mathcal{M}_s) \geq \frac{\epsilon}{4}$ を示せばよい. $\lambda \not\in (1 - \frac{\epsilon}{4}, 1 + \frac{\epsilon}{4})$ のときは明らか. $\lambda \in (1 - \frac{\epsilon}{4}, 1 + \frac{\epsilon}{4})$ とする. $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_s$ を任意に取り固定する. このときある $A = A(\mathbb{Q}) \in \mathcal{F}$ が存在し,

$$\mathbb{P}(A) < \delta \text{ かつ } \mathbb{Q}(A) \geq \epsilon \tag{4.28}$$

が成立する. ゆえに, 任意の $g \in \Gamma$ に対し

$$\begin{aligned} \left\| \lambda \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} - g \right\|_1 &\geq \left| \mathbb{E}_\mathbb{P}\left[\lambda \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mathbb{1}_A \right] - \mathbb{E}_\mathbb{P}[g\mathbb{1}_A] \right| \\ &\geq \lambda\mathbb{Q}(A) - \mathbb{E}_\mathbb{P}[g\mathbb{1}_A] \\ &\geq \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right)\epsilon - \frac{\epsilon}{4\delta}\delta > \frac{\epsilon}{4} \end{aligned} \tag{4.29}$$

が成立する. $\square$

したがって, Hahn-Banach の分離定理 (閉凸とコンパクト凸の強分離) より, $\|f\|_\infty = 1$ なる $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で

$$\sup_{h \in \widehat{\mathcal{M}_s}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[hf] \leq \inf_{g \in \Gamma} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[gf] - \frac{\epsilon}{4} \tag{4.30}$$

となるものが存在する. $\widehat{\mathcal{M}_s}$ は錐であることより, (左辺) $= 0$ となる. したがって $f \in (\widehat{\mathcal{M}_s})^\circ$ となる ($(\widehat{\mathcal{M}_s})^\circ$ は $\widehat{\mathcal{M}_s}$ の双対 $(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ に関する極集合を表す). 今, 凸錐 $\mathcal{C}$ が $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak*-closed であることに注意して, 双極定理より

$$(\widehat{\mathcal{M}_s})^\circ = \mathcal{C}^{\circ\circ} = \mathcal{C}, \tag{4.31}$$

すなわち $h \in \mathcal{C}$ となる. ゆえに, ある $H \in \mathcal{H}$ が存在し, $f \leq (H \cdot S)_\infty$ $\mathbb{P}$-a.s. が成立する. さらに, $f \geq -1$ $\mathbb{P}$-a.s. であり, 仮定より small market (B, S) が (NA) を満たすので, 補題 3.57 より $H \in \mathcal{H}_1$ となる. また, $\mathbb{P}\{f < \frac{\epsilon}{4}\} < \frac{4\delta}{\epsilon}$ が成立する. 実際, $p = \mathbb{P}\{f < \frac{\epsilon}{4}\} \geq \frac{4\delta}{\epsilon}$ と仮定すると, $g = \frac{1}{p}\mathbb{1}_{\{f < \epsilon/4\}} \in \Gamma$ となる. このとき $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[gf] \geq \frac{\epsilon}{4}$ となることに注意して,

$$\frac{\epsilon}{4} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[gf] = \frac{1}{p}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f\mathbb{1}_{\{f<\epsilon/4\}}] < \frac{\epsilon}{4} \tag{4.32}$$

となり, 矛盾が生じる. したがって

$$\mathbb{P}\left\{(H \cdot S)_\infty \geq \frac{\epsilon}{4}\right\} \geq \mathbb{P}\left\{f > \frac{\epsilon}{4}\right\} \geq 1 - \frac{4\delta}{\epsilon} \tag{4.33}$$

が成立する.

以上より, ある $0 < \epsilon < 1$ が存在し, 正数列 $\delta_k \downarrow 0$ に対し $n_k \uparrow \infty$ なる $n_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ および

$$\mathbb{P}^{n_k}\left\{(H^{n_k} \cdot S^{n_k})_\infty \geq \frac{\epsilon}{4}\right\} \geq 1 - \frac{4\delta_k}{\epsilon} \uparrow 1 \tag{4.34}$$

なる $H^{n_k} \in \mathcal{H}^{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$ が構成できた. $(H^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ は $(AA2)$ をなし, 仮定 $(NAA2)$ に矛盾する.

□

4.1.3 例 4.8 の構成

各 $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \cdots, n$ に対し, 確率空間 $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ 上の確率変数 $f^{n,j}$ を次で定める;

$$f^{n,j} = \begin{cases} 1 & \text{on } A^{n,j} \\ -2^{-j} & \text{on } B^{n,j} \\ -2^j & \text{on } C^{n,j}. \end{cases} \tag{4.35}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(A^{n,j}) &= 1 - 2^{-(j+2)} - 2^{-(n+1)}, & (4.36) \\ \mathbb{P}^n(B^{n,j}) &= 2^{-(j+2)}, & (4.37) \\ \mathbb{P}^n(C^{n,j}) &= 2^{-(n+1)} & (4.38) \end{aligned}$$

とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\{f^{n,j}\}_{j=1}^n$ は独立であるとする.
　n 次元価格過程 S^n を

$$S^n = 0,\ S_1^n = (f^{n,1}, \cdots, f^{n,n}) \tag{4.39}$$

とし, フィルトレーション $\mathbb{F}^n = (\mathcal{F}_0^n, \mathcal{F}_1^n)$ を

$$\mathcal{F}_0^n = \{\phi, \Omega\},\ \mathcal{F}_1^n = \sigma\{f^{n,1}, \cdots, f^{n,n}\} \tag{4.40}$$

とする. とする. このとき $B^n = (\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{F}^n, \mathbb{P}^n)$ 上の任意の n 次元可予測過程 H^n は確定的な n 次元ベクトル $H^n = (h^{n,j})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ とみなせ, 確率積分は

$$(H^n \cdot S^n)_1 = \sum_{j=1}^n h^{n,j} f^{n,j} \tag{4.41}$$

と書ける.

命題 4.11. 上で構成した Large financial market $(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し $(NAA2)$ が成立する.

証明. $(AA2)$ が存在したとして矛盾を導く. このときある $c > 0$ が存在し, 任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\mathbb{P}^n\{(H^n \cdot S^n)_1 \geq c\} \geq 1 - \epsilon \tag{4.42}$$

となる $H^n = (h^{n,j})_{j=1}^n \in \mathcal{H}_1^n$, $n \in \mathbb{N}$ が存在する. 確率積分 $(H^n \cdot S^n)_1 = \sum_{j=1}^n h^{n,j} f^{n,j}$ を以下で定める $g_1^n,\ g_2^n,\ g_3^n$ を用いて次のように分解する;

$$(H^n \cdot S^n)_1 = g_1^n + g_2^n + g_3^n. \tag{4.43}$$

　まず,

$$g_1^n = \sum_{\{j\leq n\ |\ h^{n,j}\leq 0\}} h^{n,j} f^{n,j} \tag{4.44}$$

とする. このとき

$$\mathbb{P}^n\{g_1^n \leq 0\} \geq \mathbb{P}^n\left(\bigcup_{j=1}^n A^{n,j}\right) \geq 1 - \sum_{j=1}^n 2^{-(j+2)} - n2^{-(n+1)} \geq \frac{1}{2} \tag{4.45}$$

となる.
　次に, 後に定める $j_0 \in \{1, \cdots, n\}$ に対し,

$$g_2^n = \sum_{\{j\leq j_0\ |\ h^{n,j}>0\}} h^{n,j} f^{n,j} \tag{4.46}$$

とする. このとき

$$\mathbb{P}^n\{g_2^n \leq 0\} \geq \mathbb{P}^n\left(\bigcap_{j=1}^{j_0} B^{n,j}\right) = \prod_{j=1}^{j_0} 2^{-(n+2)} \geq 2^{-j_0^2-2j_0} \tag{4.47}$$

となる.
　最後に, 残りの項を

$$g_3^n = \sum_{\{j_0<j\leq n\ |\ h^{n,j}>0\}} h^{n,j} f^{n,j} \tag{4.48}$$

と置く. 今, $H^n = (h^{n,j})_{j=1}^n \in \mathcal{H}_1^n$ かつ $\{f^{n,j}\}_{j=1}^n$ が独立であることより, $h^{n,j} \le 2^{-j}$ でなければならない. ゆえに

$$g_3^n \le \sum_{j=j_0+1}^{n} 2^{-j} \le 2^{-j_0} \tag{4.49}$$

となる.

そこで, j_0 として $j_0 \ge 3$, $2^{-j_0} < \frac{c}{2}$ となるように取る. このとき $\mathbb{P}^n\{g_1^n + g_2^n + g_3^n \ge c\} \ge 1 - \epsilon$ より,

$$\mathbb{P}^n \left\{ g_1^n + g_2^n \ge \frac{c}{2} \right\} \ge 1 - \epsilon \tag{4.50}$$

となる. 一方

$$\mathbb{P}^n\{g_1^n + g_2^n \le 0\}\mathbb{P}^n\{g_1^n \le 0\}\mathbb{P}^n\{g_2^n \le 0\} \ge 2^{-j_0^2 - 2j_0 - 1} \ge 4^{-j_0^2} \tag{4.51}$$

が成立する. したがって $\epsilon > 0$ が十分小さいとき, 矛盾が生じる. □

命題 4.12. 上で構成した large financual market $(B^n, S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ において, 任意の列 $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ に対し $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \trianglelefteq (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ となる.

証明. 主張を否定し矛盾を導く. $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}_s^{e,n}$, $n \in \mathbb{N}$ で $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \triangleleft (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ となるものが存在したとする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}^n$ は S^n のマルチンゲール測度であるので, 各 $j = 1, \cdots, n$ について

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}[f^{n,j}] = \mathbb{Q}^n(A^{n,j}) - 2^{-j}\mathbb{Q}^n(B^{n,j}) - 2^j\mathbb{Q}^n(C^{n,j}) \tag{4.52}$$

が成立する. これと $\mathbb{Q}^n(A^{n,j}) + \mathbb{Q}^n(B^{n,j}) + \mathbb{Q}^n(C^{n,j}) = 1$ より

$$\mathbb{Q}^n(B^{n,j}) = \frac{1 - (2^j + 1)\mathbb{Q}^n(C^{n,j})}{1 + 2^{-j}} \tag{4.53}$$

が成立する.

今, 各 $j \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{P}^n(C^{n,j}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ となることおよび $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \triangleleft (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ より $\mathbb{Q}^n(C^{n,j}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ が成立する. ゆえに

$$\mathbb{Q}^n(B^{n,j}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 + 2^{-j}} \tag{4.54}$$

となる. したがって各 $j \in \mathbb{N}$ に対しある自然数 $n_j \ge j$ が存在し,

$$\mathbb{Q}^{n_j}(B^{n_j,j}) \ge \frac{1}{1 + 2^{-j+1}}, \tag{4.55}$$

すなわち $\mathbb{Q}^{n_j}(B^{n_j,j}) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1$ となるが,

$$\mathbb{P}^{n_j}(B^{n_j,j}) = 2^{-(j+2)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{4.56}$$

より, $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \triangleleft (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に矛盾する. □

4.2 No Asymptotic Free Lunch

Small market における No Free Lunch 条件 (NFL) を large financial market に拡張する. そのために列 $(L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ において適当な意味での weak*-位相による近似の概念を定義する必要がある.

4.2.1 $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の Mackey 位相を定める基本近傍系について

まず small market における (NFL) を $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ における 0 の基本近傍系を用いて表現する.

補題 4.13. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を考える. C を $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の錐とする. また $\mathcal{V}$ を $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の weak*-位相を定める 0 の均衡凸基本近傍系とし, 各 $\epsilon>0$ に対し

$$D^\epsilon=\{h\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\mid 0\le h\le 1,\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[h]\ge\epsilon\} \tag{4.1}$$

と置く. このとき次は同値;

(i) $\overline{C}^*\cap L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})=\{0\}$, ただし $\overline{C}^*$ は C の $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の weak*-位相による閉包を表す;

(ii) 任意の $\epsilon>0$ に対しある $V\in\mathcal{V}$ が存在し

$$C\cap(D^\epsilon+V)=\phi \tag{4.2}$$

が成立する.

証明. $\underline{(i)\Rightarrow(ii)}$

(ii) が成立しないと仮定する. このときある $\epsilon>0$ が存在し, 任意の $V\in\mathcal{V}$ に対し

$$C\cap(D^\epsilon+V)\ne\phi \tag{4.3}$$

が成立, すなわちある $f_V\in C$, $h_V\in D^\epsilon$, および $g_V\in V$ が存在し, $f_V=h_V+g_V$ が成立する. 今, $\mathcal{V}$ において半順序

$$U\preceq V\ \Leftrightarrow\ V\subset U \tag{4.4}$$

を考え, 有効族とみなす. このとき明らかに

$$w^*\text{-}\lim_{V\in\mathcal{V}}g_V=0 \tag{4.5}$$

が成立する. また Alaoglu の定理より D^ϵ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で weak*-compact であることに注意して, $(h_V)_{V\in\mathcal{V}}$ の部分ネット $(h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が存在し,

$$w^*\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda}h_\lambda=\exists h\in D^\epsilon \tag{4.6}$$

が成立する. このとき $w^*\text{-}\lim_{\lambda\in\Lambda}g_\lambda=0$, したがって $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は $L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の weak*-位相に関して収束ネットとなり, その極限は $h\in D^\epsilon\subset L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\setminus\{0\}$ となる. したがって $h\in\overline{C}^*\cap L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\setminus\{0\}$ となり, (i) は不成立である.

$\underline{(ii)\Rightarrow(i)}$

(i) が成立しないと仮定する. $f\in\overline{C}^*\cap L^\infty_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $h\ne0$ とする. $g=\frac{1}{\|f\|_\infty}f$, $\epsilon=\mathbb{E}[g]>0$ と置く. C が錐であることより $\overline{C}^*$ も錐, したがって $g\in\overline{C}^*$ となる. また $0\le g\le1$ に注意して, $g\in\overline{C}^*\cap D^\epsilon$ となる. ゆえに任意の $V\in\mathcal{V}$ に対し

$$g\in(C+V)\cap D^\epsilon=C\cap(D^\epsilon+V) \tag{4.7}$$

が成立, すなわち (ii) が不成立となる. □

注意． (i) 上の補題において, (i) は (NFL) に相当する. そこで large financial market における No asymptotic free lunch $(NAFL)$ を定義するため, (ii) に着目し, 列 $(L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ において適当な 0 の均衡凸基本近傍系の列を構成することを考える.

(ii) 凸集合 $C \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対し, Mackey 位相 (弱コンパクト集合上の一様収束位相) $\tau(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ と weak*-位相 $\sigma(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ の収束は一致する. また, 定義より $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の weak-compact な集合 K の極集合 $K^\circ \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ からなる 0 の基本近傍系は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の Mackey 位相を定める. 以下, 適当な weak-compact set $K \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の族を構成することを考える.

$$(c_0)_{++} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{N}} \mid \psi(k) > 0\ \forall k \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0\} \tag{4.8}$$

と置く.

定義 4.14. 任意の $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (c_0)_{++}$ に対し, $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分集合 K^ψ を

$$K^\psi \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{conv}(B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))) \tag{4.9}$$

により定義する. ただし Banach 空間 X および $r > 0$ に対し, $B_r(X) = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq r\}$ とする.

次の補題により, K^ψ は $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak-compact であることがわかる. 一般に $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分集合 K に対し, 相対弱コンパクトであることと一様可積分であることは同値であることに注意する.

補題 4.15. 任意の $u \in K^\psi$ および $k \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|u|\mathbb{1}_{\{|u|\geq k^3\}}] \leq \frac{1}{k} + 2\phi(k) \tag{4.10}$$

が成立する. 特に各 $K^\psi \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は一様可積分, すなわち $\sigma(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-compact である.

証明. $u \in K^\psi$, $k \in \mathbb{N}$ とする. 明らかに

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|u|] \leq k + \phi(k) \tag{4.11}$$

が成立する. Chebyshev の不等式より

$$\mathbb{P}\{|u| \geq k^3\} \leq \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\phi(k)}{k}\right) \tag{4.12}$$

となる. また, ある $\lambda \in [0, 1]$ および $u_1 \in B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$, $u_2 \in B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ が存在し, $u = \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ と書ける. したがって

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|u|\mathbb{1}_{\{|u|\geq k^3\}}] &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|u_1|\mathbb{1}_{\{|u|\geq k^3\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|u_2|\mathbb{1}_{\{|u|\geq k^3\}}] \\ &\leq \psi(k) + k\frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\psi(k)}{k}\right) \leq \frac{1}{k} + 2\psi(k) \end{aligned} \tag{4.13}$$

となる. □

定義 4.16. 各 $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (c_0)_{++}$ に対し, $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の部分集合 V^ψ を

$$V^\psi \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\text{conv}}^*_{k\in\mathbb{N}}(B_{k^{-1}}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \cap B_{\psi(k)^{-1}}(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))) \tag{4.14}$$

により定義する. すなわち V^ψ は $\{B_{k^{-1}}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \cap B_{\psi(k)^{-1}}(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))\}_{k\in\mathbb{N}}$ の凸包の $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における weak*-closure を表す.

次が成立する;

- 各 V^ψ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の weak*-closed な凸集合である;
- 各 $\psi \in (c_0)_{++}$ に対し $V^\psi = (K^\psi)^\circ$ が成立する.
  実際, $\text{conv}(B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$ は 0 を含む $\sigma(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-closed な凸集合であることに注意して,

$$\begin{aligned}
(K^\psi)^\circ &= \left(\bigcap_{k=1}^\infty \text{conv}(B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})))\right)^\circ && (4.15)\\
&= \overline{\text{conv}}^*_{k\in\mathbb{N}}(\text{conv}(B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))))^\circ && (4.16)\\
&= \overline{\text{conv}}^*_{k\in\mathbb{N}}(B_{k^{-1}}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \cap B_{\psi(k)^{-1}}(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))) && (4.17)\\
&= V^\psi && (4.18)
\end{aligned}$$

  となる.
- K^ψ は $\sigma(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-closed な凸集合であることに注意して, 双極定理より

$$K^\psi = (K^\psi)^{\circ\circ} = (V^\psi)^\circ \tag{4.19}$$

  が成立する.

上で構成した $\{V^\psi\}_{\psi\in(C_0)_{++}}$ は $0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の Mackey 位相に関する基本近傍系をなす. 実際, 次の補題が成立する.

補題 4.17. 任意の $\sigma(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-compact な集合 $U \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に対しある $\psi \in (c_0)_{++}$ が存在し, $U \subset K^\psi$ が成立する.

証明. $U \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は $\sigma(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}))$-compact, したがって一様可積分である;

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{g\in U} \mathbb{E}_\mathbb{P}[|2g|\mathbb{1}_{\{|2g|\geq k\}}] = 0. \tag{4.20}$$

そこで, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\psi(k) = \sup_{g\in U} \mathbb{E}_\mathbb{P}[|2g|\mathbb{1}_{\{|2g|\geq k\}}]$ と置くと, $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (c_0)_{++}$ となる. また, 任意の $g \in U$ および $k \in \mathbb{N}$ に対し明らかに

$$g = \frac{1}{2}2g\mathbb{1}_{\{|2g|\geq k\}} + \frac{1}{2}2g\mathbb{1}_{\{|2g|<k\}} \tag{4.21}$$

となるが,

$$2g\mathbb{1}_{\{|2g|\geq k\}} \in B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), \tag{4.22}$$

$$2g\mathbb{1}_{\{|2g|<k\}} \in B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \tag{4.23}$$

より, $g \in \text{conv}(B_{\psi(k)}(L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})), B_k(L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})))$ となる. したがって $g \in K^\psi$, すなわち $U \subset K^\psi$ が成立する. $\square$

上の補題より, 任意の $\sigma(L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}),L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}))$-compact な集合 $U\subset L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ に対しある $\psi\in(c_0)_{++}$ が存在し,

$$V^\psi=(K^\psi)^\circ\subset U^\circ \tag{4.24}$$

が成立する. このことより, $\{V^\psi\}_{\psi\in(C_0)_{++}}$ は $0\in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ の Mackey 位相に関する基本近傍系をなすことがわかる.

4.2.2 $NAFL$ の定義と同値分離測度列の contiguity による同値条件

今, 列 $(L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ に対し No asymptotic free lunch ($NAFL$) を定義する. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\{K^{\psi,n}\}_{\psi\in(c_0)_{++}}$, $\{V^{\psi,n}\}_{\psi\in(c_0)_{++}}$ を確率空間 $(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$ における第 4.2.1 節で定義した集合族とする. $\{V^{\psi,n}\}_{\psi\in(c_0)_{++}}$ は $L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$ の均衡凸集合からなる 0 の基本近傍系であり, $L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$ 上の Mackey 位相 $\tau(L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n),L^1(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n))$ を誘導する.

定義 4.18. $(L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ 上に定義された Large financial market $(B^n,S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が次の性質を持つとき, **No asymptotic free lunch** ($NAFL$) を満たすという; 任意の $\epsilon>0$ に対しある $\psi\in(c_0)_{++}$ が存在し, 全ての $n\in\mathbb{N}$ について

$$\mathcal{C}^n\cap(D^{\epsilon,n}+V^{\psi,n})=\phi. \tag{4.25}$$

が成立する. ただし, $D^{\epsilon,n}\overset{\text{def}}{=}\{h^n\in L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)\mid 0\le h^n\le 1,\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[h^n]\ge\epsilon\}$ である.

つまり, ($NAFL$) は各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathcal{C}^n$ と $D^{\epsilon,n}$ が $V^{\psi,n}$ により分割されることを表すが, ここで $\psi\in(c_0)_{++}$ は $n\in\mathbb{N}$ によらず一様に取れることに注意する. またこの定義は補題 4.13 の意味で small market における (NFL) の定義の一般化である. 特に, large financial market $(B^n,S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が ($NAFL$) を満たすならば, 各 small market (B^n,S^n) は (NFL) を満たし, したがって $\mathcal{M}_s^{e,n}\neq\phi$ となる.

注意 . $(c_0)_{++}$ の半順序を

$$\psi\preceq\eta \iff \psi(k)\le\eta(k),\ \forall k\in\mathbb{N} \tag{4.26}$$

とすると, 定義より

$$\psi\preceq\eta \implies V^{\eta,n}\subset V^{\psi,n},\ \forall n\in\mathbb{N} \tag{4.27}$$

が成立する. 今, ネット $(n(\psi))_{\psi\in(c_0)_{++}}\subset\mathbb{N}$ および $g^\psi\in V^{\psi,n(\psi)}$ を考えると, $\psi\in(c_0)_{++}$ の極限を取ることで g^ψ は次の意味で 0 に収束する;

$$\lim_{\psi\in(c_0)_{++}}\sup_{u\in K^{\eta,n(\psi)}}|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n(\psi)}}[ug^\psi]|=0,\ \forall\eta\in(c_0)_{++}. \tag{4.28}$$

この設定の下, 次が成立する;

定理 4.19 (Klein, 2000)**.** Large financial market $(B^n,S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に対し, 次は同値;

(*i*) ($NAFL$) が成立;

(*ii*) ある列 $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^{e,n}$, $n\in\mathbb{N}$ で $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd\rhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ なるものが存在する.

4.2.3　定理 4.19 の証明

確率測度の列に関する contiguity は $\{K^{\psi,n}\}_{\psi\in(c_0)_{++}}$, $n\in\mathbb{N}$ を用いて次のように表現される.

補題 4.20. $\mathbb{Q}^n \ll \mathbb{P}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し, 次は同値;

(*i*) $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(*ii*) ある $\psi\in(c_0)_{++}$ が存在し, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\in K^{\psi,n}$ が成立する.

証明. 補題 4.4 より

$$(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{k\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k\right\}}\right]=0 \tag{4.29}$$

であることに注意する.

$(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と仮定する. 各 $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\psi(k)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k\right\}}\right] \tag{4.30}$$

と置くと, $\psi=(\psi(k))_{k\in\mathbb{N}}\in(c_0)_{++}$ となる. また, 各 $n,k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}=\frac{1}{2}\cdot 2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k\right\}}+\frac{1}{2}\cdot 2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\le k\right\}} \tag{4.31}$$

と書け,

$$2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k\right\}}\in B_{\psi(k)}(L^1(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)) \tag{4.32}$$

および

$$2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{2\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\le k\right\}}\in B_k(L^\infty(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)) \tag{4.33}$$

となることより, $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\in K^{\psi,n}$ が成立する.

逆に, ある $\psi\in(c_0)_{++}$ が存在し, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\in K^{\psi,n}$ が成立すると仮定する. このとき補題 4.15 より, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, 各 $k\in\mathbb{N}$ について

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k^3\right\}}\right]\le\frac{1}{k}+2\psi(k) \tag{4.34}$$

が成立する. したがって

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}\mathbb{1}_{\left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>k^3\right\}}\right]=0 \tag{4.35}$$

となり, $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する. □

定理 4.19 を証明する.

<u>$(ii)\Rightarrow(i)$</u>

ある列 $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^{e,n}$, $n\in\mathbb{N}$ で $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd\rhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ なるものが存在したとする. $(NAFL)$ が不成立であると仮定し, 矛盾を導く. このときある $\alpha>0$ が存在し, 任意の $\psi\in(c_0)_{++}$ に対し

$$\mathcal{C}^{n(\psi)}\cap(D^{\alpha,n(\psi)}+V^{\psi,n(\psi)})\neq\phi \tag{4.36}$$

なる $n(\psi) \in \mathbb{N}$ が存在する. すなわち, ある $f^\psi \in \mathcal{C}^{n(\psi)}$, $g^\psi \in V^{\psi,n(\psi)}$, および $h^\psi \in D^{\alpha,n(\psi)}$ が存在し,

$$f^\psi = g^\psi + h^\psi \tag{4.37}$$

が成立する. 今, 仮定 $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ および補題 4.20 より, ある $\eta \in (c_0)_{++}$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} \in K^{\eta,n} \tag{4.38}$$

となる. この $\eta \in (c_0)_{++}$ に対し, 上の注意より

$$\lim_{\psi\in(c_0)_{++}} \sup_{u\in K^{\eta,n(\psi)}} |\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n(\psi)}}[ug^\psi]| = 0, \tag{4.39}$$

特に

$$\lim_{\psi\in(c_0)_{++}} |\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{n(\psi)}}[g^\psi]| = 0 \tag{4.40}$$

が成立する. さらに, 各 $\psi \in (c_0)_{++}$ に対し $\mathbb{Q}^{n(\psi)} \in \mathcal{M}_s^{e,n(\psi)}$ であることより, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{n(\psi)}}[f^\psi] \leq 0$, したがって

$$\lim_{\psi\in(c_0)_{++}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{n(\psi)}}[h^\psi] = 0 \tag{4.41}$$

となる. ゆえに, Chebyshev の不等式より

$$\lim_{\psi\in(c_0)_{++}} \mathbb{Q}^{n(\psi)}\left\{h^\psi \geq \frac{\alpha}{2}\right\} = 0 \tag{4.42}$$

が成立する. 一方, 任意の $\psi \in (c_0)_{++}$ に対し

$$\alpha \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n(\psi)}}[h^\psi] \leq \frac{\alpha}{2} + \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{n(\psi)}}\left[h^\psi \mathbb{1}_{\left\{h^\psi \geq \frac{\alpha}{2}\right\}}\right] \leq \frac{\alpha}{2} + \mathbb{P}^{n(\psi)}\left\{h^\psi \geq \frac{\alpha}{2}\right\}, \tag{4.43}$$

したがって

$$\mathbb{P}^{n(\psi)}\left\{h^\psi \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \geq \frac{\alpha}{2} \tag{4.44}$$

が成立する. これは仮定 $\mathbb{P}^n \ll \mathbb{Q}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ に矛盾する.

□

$\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$

$(B^n, S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $(NAFL)$ を満たすと仮定する. $\epsilon > 0$ を任意に取り固定する. このときある $\psi \in (c_0)_{++}$ が存在し, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathcal{C}^n \cap (D^{\epsilon,n} + V^{\psi,n}) = \phi \tag{4.45}$$

が成立する. これは $(\mathcal{C}^n + V^{\psi,n}) \cap D^{\epsilon,n} = \phi$ と同値であることに注意する. 各 $n \in \mathbb{N}$ を固定し, $V^{\psi,n} \subset L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ の位相 $\sigma(L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n), L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n))$ に関する内部を $\hat{V}^{\psi,n}$ と書く. このとき $\mathcal{C}^n + \hat{V}^{\psi,n} \subset L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ は $\sigma(L^\infty(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n), L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n))$-open な凸集合であり,

$$(\mathcal{C}^n + \hat{V}^{\psi,n}) + D^{\epsilon,n} = \phi \tag{4.46}$$

を満たす. したがって Hahn-Banach の分離定理 (開凸と凸の弱分離) より, $\|g^n\|_{n,1} = 1$ なる $g^n \in L^1(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbb{P}^n)$ が存在し,

$$\sup_{f^n\in\mathcal{C}^n+\hat{V}^{\psi,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n f^n] \leq \inf_{h^n\in D^{\epsilon,n}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n h^n] \tag{4.47}$$

が成立する. ゆえに, $V^{\psi,n}$ に対し

$$\sup_{f^n\in\mathcal{C}^n+V^{\psi,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nf^n]\le\inf_{h^n\in D^{\epsilon,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nh^n] \tag{4.48}$$

となる. 今, $0\in V^{\psi,n}$ かつ $\mathcal{C}^n$ が錐であることより

$$\sup_{f^n\in\mathcal{C}^n}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nf^n]\le 0 \tag{4.49}$$

となる. また $-L^\infty_+(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)\subset\mathcal{C}^n$ より $g^n\ge 0$ $\mathbb{P}^n$-a.s. となる. ゆえに $\mathbb{Q}^n\ll\mathbb{P}^n$ を $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}=g^n$ と定義すると, $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}^n_s$ となる (同値測度とは限らないことに注意). さらに, $0\in\mathcal{C}^n$ および任意の $h^n\in D^{\epsilon,n}$ に対し

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}n}[g^nh^n]\le\|g^n\|_{n,1}\|h^n\|_{n,\infty}\le 1 \tag{4.50}$$

となることより,

$$\sup_{f^n\in V^{\psi,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nh^n]\le 1 \tag{4.51}$$

が成立する. したがって双極定理より $g^n\in(V^{\psi,n})^\circ=(K^{\psi,n})^\circ=K^{\psi,n}$ となり, 補題 4.20 より $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する.

補題 4.21. ある $\delta=\delta(\epsilon,\psi)>0$ が存在し, 全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\inf_{h^n\in D^{\epsilon,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nh^n]\ge\delta \tag{4.52}$$

が成立する.

証明. $K>0$ を十分大きく取り, $\frac{1}{K}+2\psi(K)\le\frac{1}{3}$ とする. このとき全ての $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}^n\left\{g^n\ge\frac{1}{3}\right\}\ge\frac{1}{3K^2} \tag{4.53}$$

が成立する. 実際, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $g^n\in K^{\psi,n}$ であることより, 補題 4.20 より

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n\mathbb{1}_{\{g^n\ge K^3\}}]\le\frac{1}{K}+2\psi(K)\le\frac{1}{3} \tag{4.54}$$

となり,

$$1=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n]\le\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n\mathbb{1}_{\{g^n\ge K^3\}}]+\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n\mathbb{1}_{\left\{\frac{1}{3}\le g^n<K^3\right\}}]+\frac{1}{3}\le\frac{2}{3}+K^3\mathbb{P}^n\left\{g^n\ge\frac{1}{3}\right\} \tag{4.55}$$

となる.

$\delta=\delta(\epsilon,\psi)=\frac{1}{9K^3c}$ と置く. ここで $c=c(\epsilon,\psi)>0$ は ($n\in\mathbb{N}$ に依らない) $K^{\psi,n}$ の $L^1(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$-ノルムでの上界である;

$$\sup_{u\in K^{\psi,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[|u|]\le c,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{4.56}$$

このとき任意の $u\in K^{\psi,n}$, $n\in\mathbb{N}$ に対し $|\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[u\mathbb{1}_{\left\{g^n\ge\frac{1}{3}\right\}}]|\le\|u\|_{n,1}\le c$ となることより,

$$\frac{1}{c}\mathbb{1}_{\left\{g^n\ge\frac{1}{3}\right\}}\in(K^{\psi,n})^\circ=V^{\psi,n}, \tag{4.57}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\inf_{h^n\in D^{\epsilon,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nh^n] &\geq \sup_{f^n\in V^{\psi,n}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^nf^n]\geq\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}\left[g^n\frac{1}{c}\mathbb{1}_{\left\{g^n\geq\frac{1}{3}\right\}}\right] \\
&\geq \frac{1}{3c}\mathbb{P}^n\left\{g^n\geq\frac{1}{3}\right\}\geq\frac{1}{9cK^3}=\delta \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

が成立する. □

各 $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}^n\ll\mathbb{P}^n$ を $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}=g^n$ により定義する. このとき $\mathbb{P}^n(A^n)\geq\epsilon$ なる任意の $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}^n(A^n)\geq\delta$ が成立する. 実際, このような $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{1}_{A^n}\in D^{\epsilon,n}$ となり, したがって上の補題より

$$
\mathbb{Q}^n(A^n)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}^n}[g^n\mathbb{1}_{A^n}]\geq\delta \qquad (4.59)
$$

となる.

これまでの議論をまとめると, 次のことがわかる; 任意の $\epsilon>0$ に対しある $\mathbb{Q}^{n,\epsilon}\in\mathcal{M}_s^n$, $n\in\mathbb{N}$, および $\delta_\epsilon>0$ が存在し,

(A) $(\mathbb{Q}^{n,\epsilon})_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ かつ

(B) $\mathbb{P}^n(A^n)\geq\epsilon$ なる任意の $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}^{n,\epsilon}(A^n)\geq\delta_\epsilon$ となる.

そこで, 各 $j\in\mathbb{N}$ に対し $\epsilon=2^{-j}$ に対応する $\mathbb{Q}^{n,j}=\mathbb{Q}^{n,2^{-j}}$, $\delta_j=\delta_{2^{-j}}$ を考え, 各 $n\in\mathbb{N}$ について

$$
\mathbb{Q}^n=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}\mathbb{Q}^{n,j} \qquad (4.60)
$$

と定義する. 明らかに $\mathcal{M}_s^n$ は $L^1(\Omega^n,\mathcal{F}^n,\mathbb{P}^n)$-ノルムで閉な凸集合なので, $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^n$ となる. さらに $\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}=0\}\subset\bigcap_{j=1}^\infty\{g_j<\delta_j\}$ であり, 各 $j\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^{n,j}\{g_j<\delta_j\}<\delta_j$, したがって (B) より

$$
\mathbb{P}^n\{g_j<\delta_j\}\leq2^{-j}\downarrow0 \qquad (4.61)
$$

となる. ゆえに $\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n}>0$ $\mathbb{P}^n$-a.s. となり, $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^{e,n}$ となる.

上で構成した $\mathbb{Q}^n\in\mathcal{M}_s^{e,n}$, $n\in\mathbb{N}$ が $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd\rhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を満たすことを示す.

$\underline{(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

$\gamma>0$ を任意に取り固定する. $N\in\mathbb{N}$ を大きく取り $\sum_{j=N+1}^\infty2^{-j}<\frac{\gamma}{2}$ とする. 今, (A) より, 各 $j\in\mathbb{N}$ に対し $(\mathbb{Q}^{n,j})_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, したがってある $\mu_j>0$ が存在し, $\mathbb{P}^n(A^n)<\mu_j$ なる任意の $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{Q}^{n,j}(A^n)<\frac{\gamma}{2}$ が成立する. そこで, $\mu=\min_{j=1,\cdots,N}\mu_j$ と置くと, $\mathbb{P}^n(A^n)<\mu$ なる任意の $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$
\mathbb{Q}^n(A^n)=\sum_{j=1}^{N}2^{-j}\mathbb{Q}^{n,j}(A^n)+\sum_{j=N+1}^{\infty}2^{-j}\mathbb{Q}^{n,j}(A^n)<\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=\gamma \qquad (4.62)
$$

が成立する. したがって $(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ となる.

$\underline{(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}}\lhd(\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}}$

(B) より, 各 $j\in\mathbb{N}$ について, $\mathbb{Q}^{n,j}(A^n)<\delta_j$ なる任意の $A^n\in\mathcal{F}^n$, $n\in\mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{P}^n(A^n)<2^{-j}$ が成立する. 今, $\gamma>0$ を任意に取り固定する. $N\in\mathbb{N}$ を大きくとり

$2^{-N} < \frac{\gamma}{2}$ とする. また, $\mu = 2^{-N}\delta_N \frac{\gamma}{2}$ と置く. このとき, $\mathbb{Q}^n(A^n) < \mu$ なる任意の $A^n \in \mathcal{F}^n$, $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^n(A^n) &= \mathbb{P}^n(A^n \cap \{g^N < \mu_N\}) + \mathbb{P}^n(A^n \cap \{g^N \geq \delta_N\}) \\
&\leq 2^{-N} + \mathbb{P}^n\left(A^n \cap \left\{\frac{d\mathbb{Q}^n}{d\mathbb{P}^n} \geq 2^{-N}\delta_N\right\}\right) \\
&\leq 2^{-N} + 2^N \delta_N^{-1} \mathbb{Q}^n(A^n) \\
&\leq \gamma
\end{aligned} \tag{4.63}$$

となる. したがって $(\mathbb{P}^n)_{n\in\mathbb{N}} \lhd (\mathbb{Q}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が成立する.

□

5 無限次元セミマルチンゲールとしての Large financial market model

5.1 モデルの設定

この節では, [6] に倣って, 無限個の資産の挙動を一つの確率空間上の 1 次元セミマルチンゲールの列として表す. この枠組みでは, 形式的に無限個の資産を保有する投資戦略を考えるため, 無限次元セミマルチンゲールに関する確率積分を定義する必要がある.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ を通常の条件を満たすフィルトレーション付きの確率空間とする. ここでは時間集合を有界閉区間 $\mathbb{T} = [0, T]$ とする. 無限個の資産の割引価格挙動を $\mathbb{S} = (S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ と表す. ただし各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $S^n \in \mathcal{S}$ とする. ここでは $\mathbb{S}$ を **large financial market** と呼び, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{S}^n = (S^k)_{k=1}^n$ を n**-th small market** と呼ぶ. $\mathbb{S}^n$-可積分な n 次元可予測過程 $H \in L(\mathbb{S}^n)$ に対し, その確率積分を単に $H \cdot \mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} H \cdot \mathbb{S}^n$ と書く.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, n-th small market $\mathbb{S}^n$ における λ-admissible strategy の集合を

$$\mathcal{H}_\lambda^n \stackrel{\text{def}}{=} \{H \mid n \text{ 次元可予測過程},\ H \in L(\mathbb{S}^n),\ H \cdot \mathbb{S} \geq -\lambda\} \tag{5.1}$$

とし,

$$\mathcal{H}^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\lambda>0} \mathcal{H}_\lambda^n \tag{5.2}$$

と定義する. 対応するクレームの集合を

$$\mathcal{K}_\lambda^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(H \cdot \mathbb{S})_T \mid H \in \mathcal{H}_\lambda^n\}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{K}^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\lambda>0} \mathcal{K}_\lambda^n = \{(H \cdot \mathbb{S})_T \mid H \in \mathcal{H}^n\}, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{K}^n - L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})) \cap L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \tag{5.5}$$

と定義する. さらに, $L^{\text{small}}(\mathbb{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L(\mathbb{S}^n)$ と置く, $H \in L^{\text{small}}(\mathbb{S})$ は有限次元ベクトル確率積分の意味で $\mathbb{S}$-可積分な有限次元可予測過程である.

$$\mathcal{H}_\lambda^{\text{small}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_\lambda^n \tag{5.6}$$

とし, $\mathcal{H}^{\rm small}$, $\mathcal{K}_\lambda^{\rm small}$, $\mathcal{K}^{\rm small}$, $\mathcal{C}^{\rm small}$ なども同様に定義する.

$H \in \mathcal{H}^{\rm small}$ は, 全期間および全ての事象において, ある有限個の資産のみを保有する戦略を表す. Large financial market では取引可能財が無限個存在するため, 投資戦略のクラスを形式的に無限個の資産を保有するようなクラスにまで拡張する必要がある. そこで [12] に倣い, セミマルチンゲールの列に関する一般化確率積分により, 一般化投資戦略を定義する.

定義 5.1.

$$\widehat{L}(\mathbb{S}) \overset{def}{=} \{(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{\rm small}(\mathbb{S}) \mid (H^n\cdot\mathbb{S})_{n\in\mathbb{N}}\text{が Émery 位相で Cauchy 列}\} \tag{5.7}$$

と置く. 各 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(K^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{L}(\mathbb{S})$ に対し

$$(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (K^n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\rm def}{\iff} \mathcal{S}\text{-}\lim_{n\to\infty}(H^n - K^n)\cdot\mathbb{S} = 0. \tag{5.8}$$

とし, $L(\mathbb{S}) \overset{\rm def}{=} \widehat{L}(\mathbb{S})/\sim$ の元を**一般化投資戦略**と呼ぶ. 一般化投資戦略 $\mathbb{H} = [(H^n)_{n\in\mathbb{N}}] \in L(\mathbb{S})$ に対し, $\mathbb{S}$ に関する**一般化確率積分**を $\mathbb{H}\cdot\mathbb{S} \overset{\rm def}{=} \mathcal{S}\text{-}\lim_{n\to\infty} H^n\cdot\mathbb{S}$ と定義する.

一般化投資戦略に関する admissibility を次のように定義する.

定義 5.2. 一般化投資戦略 $\mathbb{H} \in L(\mathbb{S})$ は, 近似列が一様に λ-admissible に取れる (i.e. $\exists(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ s.t. $H^n \in \mathcal{H}_\lambda^{\rm small}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) とき, λ-admissible であるという. λ-admissible な一般化投資戦略全体を $\mathcal{H}_\lambda^{\rm large}$ とし, $\mathcal{H}^{\rm large} \overset{\rm def}{=} \bigcup_{\lambda>0}\mathcal{H}_\lambda^{\rm large}$ と置く.

Small market におけるクレームの集合と同様に, $\mathcal{K}_\lambda^{\rm large}$, $\mathcal{C}^{\rm large}$ を次のように定義する;

$$\mathcal{K}_\lambda^{\rm large} \overset{\rm def}{=} \{(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_T \mid \mathbb{H} \in \mathcal{H}_\lambda^{\rm large}\}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{K}^{\rm large} \overset{\rm def}{=} \{(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_T \mid \mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\rm large}\}, \tag{5.10}$$

$$\mathcal{C}^{\rm large} \overset{\rm def}{=} (\mathcal{K}^{\rm large} - L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})) \cap L_+^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}). \tag{5.11}$$

この設定の下, large financial market $\mathbb{S}$ における次の無裁定条件を考える;

定義 5.3. Large financial market $\mathbb{S}$ が

(*i*) $(NA)_{\rm small}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \mathcal{C}^{\rm small} \cap L_+^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{0\}$;

(*ii*) $(NFLVR)_{\rm small}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \overline{\mathcal{C}^{\rm small}} \cap L_+^\infty = \{0\}$;

(*iii*) $(NUPBR)_{\rm small}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \mathcal{K}_1^{\rm small}$ が $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$-有界;

(*iv*) $(NA)_{\rm large}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \mathcal{C}^{\rm large} \cap L_+^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = \{0\}$;

(*v*) $(NFLVR)_{\rm large}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \overline{\mathcal{C}^{\rm large}} \cap L_+^\infty = \{0\}$;

(*vi*) $(NUPBR)_{\rm large}$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \mathcal{K}_1^{\rm large}$ が $L^0(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$-有界.

(*vii*) $(NAFL)$ を満たす $\overset{\rm def}{\iff} \overline{\mathcal{C}^{\rm small}}^{*} \cap L_+^\infty = \{0\}$.

注意 . (i) 明らかに $\mathcal{K}_1^{\mathrm{small}} \subset \mathcal{K}_1^{\mathrm{large}} \subset \widehat{\mathcal{K}_1^{\mathrm{small}}}$ ($\widehat{\mathcal{K}_1^{\mathrm{small}}}$ は $\mathcal{K}_1^{\mathrm{small}}$ の $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における閉包を表す) より,

$$(NUPBR)_{\mathrm{small}} \iff (NUPBR)_{\mathrm{large}} \tag{5.12}$$

が成立する. そのため, 以後これらを単に $(NUPBR)$ と表す.

(ii) $(NAFL)$ は第 4.2 節で定義したものの特別な場合である.

また, asymptotic arbitrage は次のように定義される.

定義 5.4. (i) 投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}$ を考える. ある $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$, および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

- $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}$ かつ
- $\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c_n\} \geq \alpha$

となるとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(AA1)$ とよぶ.

(ii) 投資戦略の列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}$ を考える.

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ かつ
- ある $c > 0$ が存在し, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c\} = 1$

となるとき, $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $(AA2)$ とよぶ.

$(AA1)$, $(AA2)$ が存在しないとき, large financial market $\mathbb{S}$ はそれぞれ $(NAA1)$, $(NAA2)$ を満たすという.

この設定では, $(NUPBR)$ と $(NAA1)$ は同値である.

命題 5.5.

$$(NUPBR) \iff (NAA1) \tag{5.13}$$

証明. $\mathbb{S}$ が $(NUPBR)$ を満たすとする. $(AA1)$ $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在したと仮定し, 矛盾を導く. このときある $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$, および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

- $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}$ かつ
- $\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c_n\} \geq \alpha$

となる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $K^n \frac{1}{\epsilon_n} H^n$ と置くと, $K^n \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ かつ

$$\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq \frac{c_n}{\epsilon_n}\} \geq \alpha \tag{5.14}$$

となり, $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$ に注意して, $(NUPBR)$ に矛盾する.

次に, $\mathbb{S}$ が $(NUPBR)$ を満たさないと仮定する. このときある $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq n\} \geq \alpha \tag{5.15}$$

となる. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $K^n = \frac{1}{\sqrt{n}} H^n$ と置くと, $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $(AA1)$ となる. □

5.2 Large financial market における数理ファイナンスの基本定理

次の補題の主張は [6] で証明無しで暗に用いられているが, 自明ではないように思われるのでその証明を付しておく.

補題 5.6. $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}$, $\lambda = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\alpha}\} > 0$ と置く. このとき次が成立する;

(*i*) $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\lambda}$;

(*ii*) $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty = \lambda$.

証明. (*i*) λ の定義より, ある $\alpha_k \downarrow \lambda$ が存在し, $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\alpha_k}$ となる. さらに, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対しある $H^k \in \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_{\alpha_k}$ が存在し,

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[H^k\cdot\mathbb{S} - \mathbb{H}\cdot\mathbb{S}] \le \frac{1}{k} \tag{5.1}$$

が成立する. そこで, $K^k = \frac{\lambda}{\alpha_k}H^k$ と置くと, $K^k \in \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_{\lambda}$ かつ

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[K^k\cdot\mathbb{S} - \mathbb{H}\cdot\mathbb{S}] &\le \mathbb{D}_{\mathcal{S}}\left[\frac{\lambda}{\alpha_k}(H^k\cdot\mathbb{S} - \mathbb{H}\cdot\mathbb{S})\right] + \mathbb{D}_{\mathcal{S}}\left[\frac{\lambda-\alpha_k}{\alpha_k}\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}\right]\\ &\le \frac{1}{k} + \mathbb{D}_{\mathcal{S}}\left[\frac{\lambda-\alpha_k}{\alpha_k}\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}\right] \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}\tag{5.2}$$

が成立する. 最後の極限は $\mathbb{H}\cdot\mathbb{S} \in \mathcal{S}$ であることおよびセミマルチンゲール位相の定義による. したがって $K^k\cdot\mathbb{S} \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}}} \mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$, すなわち $(K^k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}$ となる. ゆえに $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\lambda}$ が成立する.

(*ii*) $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\lambda}$ より, 明らかに $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty \le \lambda$ が成立する. 逆の不等号を示す. $\epsilon > 0$ を任意に取り固定する. このとき, λ の定義より, $H^k\cdot\mathbb{S} \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}}} \mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ なる任意の $(H^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{\mathrm{small}}(\mathbb{S})$ において, 有限個の $k \in \mathbb{N}$ を除いて $\sup_{t\in[0,T]} \|(H^k\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty \ge \lambda - \epsilon$ が成立する (さもなければ $H^k \in \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_{\lambda-\epsilon}$, ゆえに $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\lambda-\epsilon}$ となり, λ の取り方に矛盾する). したがって $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty \ge \lambda - \epsilon$ が成立する. $\epsilon > 0$ は任意だったので, $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty \ge \lambda$, ゆえに $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty = \lambda$ となる.

□

Small market における補題 3.57 と同様に, 次が成立する.

補題 5.7. Large financial market $\mathbb{S}$ が $(NA)_{\mathrm{large}}$ を満たすと仮定する. $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}$, $\delta = \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_T\|_\infty$ とする. このとき $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\delta}$ が成立する.

証明. $\lambda = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\alpha}\}$ と置く. このとき $\lambda \le \delta$ となることを示す. $\lambda > \delta$ と仮定し矛盾を導く. 上の補題より, $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_{\lambda}$ かつ $\sup_{t\in[0,T]} \|(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})^-_t\|_\infty = \lambda$ が成立する. したがって, ある $t \in [0,T)$ および $\lambda > \delta + \epsilon$ なる $\epsilon \in (0,\delta)$ が存在し,

$$\mathbb{P}\{(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_t \le -\lambda + \epsilon\} = \alpha > 0 \tag{5.3}$$

が成立する. $D = \{(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_t \le -\lambda+\epsilon\} \in \mathcal{F}_t$ と置く. $H^k\cdot\mathbb{S} \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}}} \mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ なる $(H^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_{\lambda}$ を取り, $K^k = \mathbb{1}_{D\times(t,\infty)}H^k$, $k \in \mathbb{N}$ と置く. このとき明らかに

$$K^k\cdot\mathbb{S} \underset{k\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{S}}} \mathbb{1}_{D\times(t,T]}\cdot(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}) = \mathbb{K}\cdot\mathbb{S} \tag{5.4}$$

が成立する. さらに

$$\begin{aligned}(\mathbb{K}\cdot\mathbb{S})_T &= (\mathbb{1}_{D\times(t,T]}\cdot(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}))_\infty \\ &= \mathbb{1}_D((\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_T-(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_t) \\ &\geq \mathbb{1}_D(-\delta+\lambda-\epsilon)\end{aligned} \tag{5.5}$$

が成立する. $\beta=-\delta+\lambda-\epsilon>0$ に注意して,$(\mathbb{K}\cdot\mathbb{S})_T\geq 0$ a.s. かつ $\mathbb{P}\{(\mathbb{K}\cdot\mathbb{S})_T=\beta\}=\alpha>0$ が成立する.

$\mathbb{K}\in\mathcal{H}^{\mathrm{large}}$ を示せば, $(NA)_{\mathrm{large}}$ に矛盾し, 主張が示せる. $\mathbb{K}\in\mathcal{H}^{\mathrm{large}}_\delta$ となることを示す.

$$D^k=\{(K^k\cdot\mathbb{S})_t\leq-\lambda+\epsilon+2^{-k}\} \tag{5.6}$$

と置く. このとき明らかに $\mathbb{1}_{D^k}\xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}}\mathbb{1}_D$ が成立する. $\widetilde{K}^k=\mathbb{1}_{D^k\times(t,T]}H^k$ と置く. $u\geq t$ に対し

$$(\tilde{K}^k\cdot\mathbb{S})_u=\mathbb{1}_{D^k}((H^k\cdot\mathbb{S})_u-(H^k\cdot\mathbb{S})_t)\geq\mathbb{1}_{D^k}(-\lambda+\lambda-\epsilon-2^{-k})\geq-\epsilon-2^{-k} \tag{5.7}$$

となる. $\epsilon\in(0,\delta)$ に注意して, 十分大きい $k\in\mathbb{N}$ に対し $\widetilde{K}^k\in\mathcal{H}^{\mathrm{large}}_\delta$ となる. $\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}\xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}}\mathbb{K}\cdot\mathbb{S}$ を示す. そのために

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}-K^k\cdot\mathbb{S}]\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{5.8}$$

を示せばよい. $|J|\leq 1$ なる任意の可予測過程 J を取る. このとき $u\geq t$ に対し

$$(J\cdot(\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}-K^k\cdot\mathbb{S}))_u=(\mathbb{1}_{D^k}-\mathbb{1}_D)(((JH^k)\cdot\mathbb{S})_u-((JH^k)\cdot\mathbb{S})_t) \tag{5.9}$$

が成立する. ゆえに, $g^k_u(J)=((JH^k)\cdot\mathbb{S})_u-((JH^k)\cdot\mathbb{S})_t$ と置くと,

$$\begin{aligned}\sup_{\{J\ |\ |J|\leq 1\}}\mathbb{E}[(J\cdot(\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}-K^k\cdot\mathbb{S}))^*_T\wedge 1] &\leq \sup_{\{J\ |\ |J|\leq 1\}}\mathbb{E}[|\mathbb{1}_{D^k}-\mathbb{1}_D|(g^k(J)^*_T\wedge 1)] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{D^k}-\mathbb{1}_D|]\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned} \tag{5.10}$$

したがって

$$\mathbb{D}_{\mathcal{S}}[\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}-K^k\cdot\mathbb{S}]\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{5.11}$$

が成立する. ゆえに $\widetilde{K}^k\cdot\mathbb{S}\xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}}\mathbb{K}\cdot\mathbb{S}$ となり, $(\widetilde{K}^k)_{k\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}$, すなわち $\mathbb{K}\in\mathcal{H}^{\mathrm{large}}_\delta$ が従う. これと前半の議論より, 仮定 $(NA)_{\mathrm{large}}$ に矛盾する. □

この補題より, small market の場合と同様にして次が成立する;

命題 5.8. (i) $(NFLVR)_{\mathrm{small}}\iff(NA)_{\mathrm{small}}+(NUPBR)$;

(ii) $(NFLVR)_{\mathrm{large}}\iff(NA)_{\mathrm{large}}+(NUPBR)$.

次の補題より, $\mathcal{C}^{\mathrm{small}}$ および $\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ の分離測度は一致する.

補題 5.9. $\mathbb{Q}\ll\mathbb{P}$ を, 任意の $f\in\mathcal{C}^{\mathrm{small}}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f]\leq 0$ となるような確率測度とする. このとき任意の $g\in\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g]\leq 0$ が成立する.

証明. $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}$ を任意に取る. このときある $\lambda > 0$ および $(H^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_\lambda$ が存在し, $H^k \cdot \mathbb{S} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}} \mathbb{H} \cdot \mathbb{S}$ が成立する. 特に $(H^k \cdot \mathbb{S})_T \xrightarrow[k\to\infty]{\mathbb{P}} (\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T$ が成立する. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{Q}$ の取り方より $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(H^k \cdot \mathbb{S})_T] \leq 0$ が成立する. したがって, Fatou の補題より

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T] \leq 0 \tag{5.12}$$

が成立する. したがって, 任意の $g \in \mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g] \leq 0$ が成立する. □

そこで,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s &\overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^{\mathrm{small}}\} \\ &= \{\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \leq 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^{\mathrm{large}}\}\end{aligned} \tag{5.13}$$

と定義し, $\mathcal{M}^e_s \overset{\mathrm{def}}{=} \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_s \mid \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}\}$ と定義する. $\mathcal{M}^e_s \neq \phi$ であるとき, large financial market $\mathbb{S}$ は (ESM) を満たすという. この設定の下, large financial market における数理ファイナンスの基本定理は次のようになる.

定理 5.10 (Cuchiero-Klein-Teichman, 2016)**.** $(NFLVR)_{\mathrm{large}}$ を仮定する. このとき $\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak*-closed である. 特に

$$(NFLVR)_{\mathrm{large}} \iff (ESM) \tag{5.14}$$

が成立する.

証明の概略 *(第 3.3.2 節参照)*. $(ESM) \Rightarrow (NFLVR)_{\mathrm{large}}$ は明らか.

$(NFLVR)_{\mathrm{large}} \Leftrightarrow (NA)_{\mathrm{large}} + (NUPBR)$ を仮定する. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐

$$\mathcal{C}^{0,large} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{K}^{\mathrm{large}} - L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \tag{5.15}$$

が Fatou-closed であることを示せばよい. $h_k \in \mathcal{C}^{0,large}$, $h_k \geq -1$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $h_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} h \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a.s. とする. このとき $h \in \mathcal{C}^{0,large}$ を示せばよい. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対しある $f_k \in \mathcal{K}^{\mathrm{large}}$ が存在し, $f_k \geq h_k$ a.s. となる. とくに $f_k \geq -1$ a.s. であるから, 補題 5.7 より $f_k \in \mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1$ である. $(NUPBR)$ より $\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1$ が $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$-有界であることに注意して, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $g_k \in \mathrm{conv}(f_k, f_{k+1}, \cdots)$, $k \in \mathbb{N}$ で a.s. である $g \in \widehat{\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1}$ に収束するものが取れる. ここで $\widehat{\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1}$ は $\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1$ の $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における閉包を表す. このとき明らかに $g \geq h$ a.s. が成立する. したがって

$$D_h = \left\{ g \in \widehat{\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1} \mid g \geq h \text{ a.s.} \right\} \neq \phi \tag{5.16}$$

となる. さらに $(NUPBR)$ に注意して, D_h は $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の有界閉集合であり, したがって $D^{\max}_h \neq \phi$ となる.

$f_0 \in D^{\max}_h$ を任意に取り固定する. $f_0 \in \mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1$ を示せばよい. $f_0 \in \widehat{\mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1}$ より, ある $f_k \in \mathcal{K}^{\mathrm{large}}_1$, $k \in \mathbb{N}$ が存在し, $f_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ a.s. となる. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対しある $\mathbb{H} \in \mathcal{H}^{\mathrm{large}}_1$ が存在し, $f_k = (\mathbb{H} \cdot \mathbb{S})_T$ となる. さらに $\mathcal{H}^{\mathrm{large}}_1$ の定義より, ある $(H^{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_1$ が存在し, $H^{k,n} \cdot \mathbb{S} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} \mathbb{H}^k \cdot \mathbb{S}$ が成立する. 特に, ある $n(k) \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$(H^{k,n(k)} \cdot \mathbb{S})_T \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_0 \text{ a.s.} \tag{5.17}$$

となる. $f_0 \in D_h^{\max}$ に注意して, 第 3.3.2 節の議論より, $(H^{k,n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ の forward convex combination $\widetilde{H}^k \in \mathrm{conv}(H^{k,n(k)}, H^{k+1,n(k+1)}, \cdots)$, $k \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\widetilde{H}^k \cdot \mathbb{S} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}} \exists Z \in \mathcal{S} \tag{5.18}$$

となる. $\widetilde{H}^k \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ に注意して, $\mathbb{H} = [(\widetilde{H}^k)_{k\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{large}}$ かつ $\mathbb{H}\cdot\mathbb{S} = Z$ となる. このとき $(\mathbb{H}\cdot\mathbb{S})_T = f_0$ となり, したがって $f_0 \in \mathcal{K}_1^{\mathrm{large}}$ が成立する. 以上で $\mathcal{C}^{0,large}$ が Fatou-closed であることが示せた.

したがって $\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak*-closed となる.

$$\mathcal{M}_s^e = \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^{\mathrm{large}}\} \tag{5.19}$$

に注意して, Kreps-Yan の定理より (ESM) が従う. □

上の定理より, $(NFLVR)_{\mathrm{large}} \Leftrightarrow (NAFL)$ が従う. まず次の補題を示す.

補題 5.11.

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{large}})^\circ = (\mathcal{C}^{\mathrm{small}})^\circ = \bigcup_{a>0}(a\mathcal{M}_s). \tag{5.20}$$

証明. 明らかに $(\mathcal{C}^{\mathrm{large}})^\circ \subset (\mathcal{C}^{\mathrm{small}})^\circ$ が成立する.

$g \in \bigcup_{a>0}(a\mathcal{M}_s)$ を任意に取る. このとき任意の $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ に対し $\mathbb{E}[gf] \le 0$ となることより, $g \in (\mathcal{C}^{\mathrm{large}})^\circ$ となる.

一方, $g \in (\mathcal{C}^{\mathrm{small}})^\circ$ とすると, $-L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{C}^{\mathrm{small}}$ に注意して, $g \ge 0$ a.s. となる. $g = 0$ a.s. の場合は明らか. $\mathbb{P}\{g > 0\} > 0$ と仮定する. このとき $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ を $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \frac{g}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g]}$ により定義する. このとき任意の $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{small}}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0$ となることより, $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_s$, ゆえに $g \in \bigcup_{a>0}(a\mathcal{M}_s)$ となる. □

命題 5.12.

$$(NFLVR)_{\mathrm{large}} \iff (NAFL) \iff (ESM) \tag{5.21}$$

が成立する. さらにこのとき $\mathcal{C}^{\mathrm{large}} = \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{small}}}^*$ が成立する.

証明. $(NFLVR)_{\mathrm{large}} \Leftrightarrow (ESM)$ は示した. 一方

$$\mathcal{M}_s^e = \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f] \le 0,\ \forall f \in \mathcal{C}^{\mathrm{small}}\} \tag{5.22}$$

に注意して, Kreps-Yan の定理より $(NAFL) \Leftrightarrow (ESM)$ が従う.

今, $(NFLVR)_{\mathrm{large}}$ を仮定する. このとき $\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$ は $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ で weak*-closed である. $\mathcal{C}^{\mathrm{large}}$, $\mathcal{C}^{\mathrm{small}}$ は共に $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸錐であることに注意して, 双極定理より

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{large}})^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{large}}}^* = \mathcal{C}^{\mathrm{large}}, \tag{5.23}$$

$$(\mathcal{C}^{\mathrm{small}})^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{small}}}^* \tag{5.24}$$

が成立する. しかし, 上の補題より $(\mathcal{C}^{\mathrm{large}})^\circ = (\mathcal{C}^{\mathrm{small}})^\circ$ であるから, 結局

$$\mathcal{C}^{\mathrm{large}} = \overline{\mathcal{C}^{\mathrm{small}}}^* \tag{5.25}$$

が成立する. □

また, $(NAA2)$ について次が成立する.

命題 5.13. Large financial market $\mathbb{S}$ に対し,

$$(ESM) \implies (NAA2) \tag{5.26}$$

が成立する.

証明. $(AA2)$ $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}^{\mathrm{small}}$ が存在したとする. すなわち全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ かつある $c > 0$ が存在し

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c\} = 1 \tag{5.27}$$

となる. 今, 確率測度 $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ を任意に取る. このとき

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(H^n \cdot \mathbb{S})_T] &\geq c\mathbb{Q}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c\} - \mathbb{Q}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T < c\} \\ &= (1+c)\mathbb{Q}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c\} - 1 \end{aligned} \tag{5.28}$$

となる. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ より $\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}\{(H^n \cdot \mathbb{S})_T \geq c\} = 1$, したがって十分大きい $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(H^n \cdot \mathbb{S})_T] > 0$ となる. よって $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ は $\mathbb{S}$ の分離測度にはなり得ない. したがってこのとき $\mathbb{S}$ の同値分離測度は存在しない. 対偶を取ることで主張が示せた. □

注意 . 明らかに $(NA)_{\mathrm{large}} \Rightarrow (NA)_{\mathrm{small}}$ が成立するが, 逆は一般に不成立である. また, small market の場合 (補題 3.64 参照) と異なり, (ESM) から $(E\sigma M)$ は従わない. さらに命題 5.13 の逆は不成立である. これらの反例を後に構成する (例 5.20).

まとめると次のように書ける.

命題 5.14. Large financial market $\mathbb{S}$ について, 次の関係が成立する;

$$(NA)_{\mathrm{large}} \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} (NA)_{\mathrm{small}}, \tag{5.29}$$

$$(\ (NUPBR) \overset{\mathrm{def}}{\iff}\ )\ (NUPBR)_{\mathrm{small}} \Leftrightarrow (NUPBR)_{\mathrm{large}} \Leftrightarrow (NAA1), \tag{5.30}$$

$$\begin{array}{lllllllll} (NFLVR)_{\mathrm{small}} & \Leftrightarrow & (NA)_{\mathrm{small}} + (NUPBR) & & & & & & \\ \quad\Uparrow \not\Downarrow & & & & & & & & \\ (NFLVR)_{\mathrm{large}} & \Leftrightarrow & (NA)_{\mathrm{large}} + (NUPBR) & \Leftrightarrow & (NAFL) & \Leftrightarrow & (ESM) & \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} & (E\sigma M) \\ & & & & & & \not\Uparrow \Downarrow & & \\ & & & & & & (NAA2). & & \end{array}$$

5.3 基準財変更における無裁定条件

Large financial market $\mathbb{X} = ((S^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1, V)$ を考える. ここで V は $S^0 \equiv 1$ に代わる新しい基準財の S^0 による割引価格を表し, 正値セミマルチンゲールであるとする. 基準財を S^0 から V に変更すると, 各危険資産および安全資産の V による割引価格はそれぞれ $\frac{S^n}{V}$ および $\frac{1}{V}$ となる. したがって新しい large financial market $\mathbb{Z} = ((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{V}, 1)$ を考えることとなる. この節では, 新しいマーケット $\mathbb{Z}$ における無裁定型条件を元のマーケッ

ト $\mathbb{X}$ に関する条件として記述し, さらに基準財変更によって無裁定型条件が保存するための条件について説明する. これらの結果は small market における先行研究 [11], [28] の large financial market への拡張である.

まず, dominating portfolio の概念を定義する.

定義 5.15. $\mathbb{S}$ を large financial market とする.

(i) $x > 0$, $H \in L^{\mathrm{small}}(\mathbb{S})$ の組 $\pi = (x, H)$ を small market における**ポートフォリオ (portfolio)** と呼び, 対応する**富過程**を $W^\pi \overset{\mathrm{def}}{=} x + H \cdot \mathbb{S}$ と表す.

(ii) $x > 0$, $\mathbb{H} \in L(\mathbb{S})$ の組 $\pi = (x, \mathbb{H})$ を**一般化ポートフォリオ (generalized portfolio)** と呼び, 対応する**一般化富過程**を $W^\pi \overset{\mathrm{def}}{=} x + \mathbb{H} \cdot \mathbb{S}$ と表す.

定義 5.16. $\mathbb{S}$ を large financial market とし, $\xi \in L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする.

(i) Small market におけるポートフォリオ $\pi = (1, H)$ が ξ に関する **dominating portfolio** $(DP)_{\mathrm{small}}$ であるとは, $H \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ かつ

$$W_T^\pi \begin{cases} \geq \xi & \text{a.s.} \\ > \xi & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.1}$$

となることを言う.

(ii) 一般化ポートフォリオ $\pi = (1, \mathbb{H})$ が ξ に関する **generalized dominating portfolio** (GDP) であるとは, $\mathbb{H} \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{large}}$ かつ

$$W_T^\pi \begin{cases} \geq \xi & \text{a.s.} \\ > \xi & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.2}$$

となることを言う.

(iii) ポートフォリオの列 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. ある $\epsilon_n \downarrow 0$ および $\alpha > 0$ が存在し, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対し

- $\pi^n = (\epsilon_n, H^n)$, $H^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}$ かつ
- $\mathbb{P}\{W_T^{\pi_n} \geq \xi\} \geq \alpha$

が成立するとき, $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を ξ に関する **asymptotically dominating portfolios of the first kind** $(ADP1)$ であるという.

(iv) ポートフォリオの列 $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. ある $c \in (0, 1)$ が存在し,

- $\pi^n = (c, H^n)$, $H^n \in \mathcal{H}_c^{\mathrm{small}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ かつ
- $\lim n \to \infty \mathbb{P}\{W_T^{\pi_n} \geq \xi\} = 1$

が成立するとき, $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を ξ に関する **asymptotically dominating portfolios of the second kind** $(ADP2)$ であるという.

上の $(i)\sim(iv)$ が存在しないとき, $\xi\in L^0_+(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ は $\mathbb{S}$ においてそれぞれ $(NDP)_{\rm small}$, $(NGDP)$, $(NADP1)$, $(NADP2)$ を満たすという. 次の定理が主結果である.

定理 5.17. Large financial market $\mathbb{X}=((S^n)_{n\in\mathbb{N}},1,V)$ および $\mathbb{Z}=((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}},\frac{1}{V},1)$ を考える. ただし V は正値セミマルチンゲールとし, $V_0=1$ と仮定する.

(i) $\mathbb{Z}$ が $(NA)_{\rm small}$ を満たす $\Longleftrightarrow$ V_T が $\mathbb{X}$ において $(NDP)_{\rm small}$ を満たす.

(ii) $\mathbb{Z}$ が $(NA)_{\rm large}$ を満たす $\Longleftrightarrow$ V_T が $\mathbb{X}$ において $(NGDP)$ を満たす.

(iii) $\mathbb{Z}$ が $(NAA1)$ を満たす $\Longleftrightarrow$ V_T が $\mathbb{X}$ において $(NADP1)$ を満たす.

(iv) $\mathbb{Z}$ が $(NAA2)$ を満たす $\Longleftrightarrow$ V_T が $\mathbb{X}$ において $(NADP2)$ を満たす.

すなわち, 基準財 V で割り引かれた large financial market $\mathbb{Z}$ の無裁定条件が, 基準財 $S^0\equiv 1$ で割り引かれた large financial market $\mathbb{X}$ および V_T に関する条件として特徴づけられる.

次の補題は基準財変更において重要な役割を持つ.

補題 5.18. Large financial market $\mathbb{X}=((S^n)_{n\in\mathbb{N}},1,V)$ および $\mathbb{Z}=((\frac{S^n}{V})_{n\in\mathbb{N}},\frac{1}{V},1)$ を考える. ただし V は正値セミマルチンゲールとし, $V_0=1$ と仮定する.

(i) 任意の $\pi^{\mathbb{Z}}=(x,K)$, $x>0$, $K\in\mathcal{H}^{\rm small}_x(\mathbb{Z})$ に対し, ある $\pi^{\mathbb{X}}=(x,L)$, $L\in\mathcal{H}^{\rm small}_x(\mathbb{X})$ が存在し,
$$W^{\pi^{\mathbb{X}}}=W^{\pi^{\mathbb{Z}}}V \tag{5.3}$$
が成立する.

(ii) 任意の $\pi^{\mathbb{Z}}=(x,\mathbb{K})$, $x>0$, $\mathbb{K}\in\mathcal{H}^{\rm large}_x(\mathbb{Z})$ に対し, ある $\pi^{\mathbb{X}}=(x,\mathbb{L})$, $L\in\mathcal{H}^{\rm large}_x(\mathbb{X})$ が存在し,
$$W^{\pi^{\mathbb{X}}}=W^{\pi^{\mathbb{Z}}}V \tag{5.4}$$
が成立する.

証明. (i) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{X}^n=(S^1,\cdots,S^n,1,V)$, $\mathbb{Z}^n=(\frac{S^1}{V},\cdots,\frac{S^n}{V},\frac{1}{V},1)$ と置く (これらは $(n+2)$ 次元セミマルチンゲールである). $K\in L^{\rm small}(\mathbb{Z})=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}L(\mathbb{Z}^n)$ より, ある $n\in\mathbb{N}$ に対し $K\in L(\mathbb{Z}^n)$ となる. この $n\in\mathbb{N}$ を固定する. $\mathbb{X}^n=\mathbb{Z}^nV$ に注意して, 伊藤の公式 (product rule) より
$$d\mathbb{X}^n_t=\mathbb{Z}^n_{t-}dV_t+V_{t-}d\mathbb{Z}^n_t+d[V,\mathbb{Z}^n]_t \tag{5.5}$$
が成立する. 今, $Y=W^{\pi^{\mathbb{Z}}}V=(x+K\cdot\mathbb{Z})V=(x+K\cdot\mathbb{Z}^n)V$ と置くと, 伊藤の公式および確率積分の associativity より
$$\begin{aligned} dY_t &= (x+(K\cdot\mathbb{Z}^n)_{t-})dV_t+V_{t-}d(K\cdot\mathbb{Z}^n)_t+d[V,K\cdot\mathbb{Z}^n]_t && (5.6)\\ &= (x+(K\cdot\mathbb{Z}^n)_{t-})dV_t+(V_{t-}K_t)d\mathbb{Z}^n_t+K_td[V,\mathbb{Z}^n]_t && (5.7)\\ &= (x+(K\cdot\mathbb{Z}^n)_{t-})dV_t+K_td\mathbb{X}^n_t-(K_t,\mathbb{Z}^n_{t-})dV_t && (5.8)\end{aligned}$$
が成立する. ここで $(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^{n+2}$ の標準内積である. したがって, ある $(n+2)$ 次元可予測過程 $L\in L(\mathbb{X}^n)$ が存在し,
$$Y=x+L\cdot\mathbb{X}^n=x+L\cdot\mathbb{X} \tag{5.9}$$

と書ける. $K \in \mathcal{H}_x^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ より, $W^{\pi^{\mathbb{Z}}} \geq 0$, したがって $Y \geq 0$ となり, $L \cdot \mathbb{X} \geq -x$ が従う. すなわち $L \in \mathcal{H}_x^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ である. ポートフォリオ $\pi^{\mathbb{X}} = (x, L)$ を考えると, $W^{\pi^{\mathbb{X}}} = Y = W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V$ が成立する.

(ii) $\pi^{\mathbb{Z}} = (x, \mathbb{K})$, $x > 0$, $\mathbb{K} \in \mathcal{H}_x^{\mathrm{large}}(\mathbb{Z})$ とする. このときある列 $(K^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_x^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ が存在し, $K^k \cdot \mathbb{Z} \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}} \mathbb{K} \cdot \mathbb{Z}$ となる. 今, 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_k^{\mathbb{Z}} = (x, K^k)$ を考え, $Y^k = W^{\pi_k^{\mathbb{Z}}} V$ と置く. このとき (i) より, ある $\pi_k^{\mathbb{X}} = (x, L)$, $L^k \in \mathcal{H}_x^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $Y^k = W^{\pi_k^{\mathbb{X}}}$ が成立する.

$(W^{\pi_k^{\mathbb{Z}}})_{k\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列であることより, $(Y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ も Émery 位相で Cauchy 列となる. ゆえに $(W^{\pi_k^{\mathbb{X}}})_{k\in\mathbb{N}}$, したがって $(L^k \cdot \mathbb{X})_{k\in\mathbb{N}}$ も Émery 位相で Cauchy 列となる. すなわち $\mathbb{L} = [(L^k)_{k\in\mathbb{N}}] \in \mathcal{H}_x^{\mathrm{large}}(\mathbb{X})$ となる. そこで, $\pi^{\mathbb{X}} = (x, \mathbb{L})$ と置くと, $Y^k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}} W^{\pi^{\mathbb{X}}}$ となる. 一方, $Y^k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}} W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V$ より, $W^{\pi^{\mathbb{X}}} = W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V$ が成立する.

□

注意 . $W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V$ は基準財 V で割引された価格過程 $\mathbb{Z}$ に関する富を, 各時刻で基準財 $S^0 \equiv 1$ で計算した価格を表す. 補題 5.18 は, この価格が $\mathbb{X}$ における富過程として表現でき, さらに admissibility を保存することを示している.

定理 *5.17* の証明. $(\mathbb{X}, V)$, $(\mathbb{Z}, \frac{1}{V})$ の対称性より, 例えば (i) に対しては次の二つを示せばよい;

(A) $\mathbb{Z}$ において $\frac{1}{V_T}$ に関する $(DP)_{\mathrm{small}}$ が存在する $\Longrightarrow$ $\mathbb{X}$ について $(NA)_{\mathrm{small}}$ が不成立;

(B) $\mathbb{Z}$ について $(NA)_{\mathrm{small}}$ が不成立 $\Longrightarrow$ $\mathbb{X}$ において V_T に関する $(DP)_{\mathrm{small}}$ が存在する.

(i) (A) $\pi^{\mathbb{Z}} = (1, K)$, $K \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}$ における $\frac{1}{V_T}$ の $(DP)_{\mathrm{small}}$ であるとする. 補題 5.18 より, ある $\pi^{\mathbb{X}} = (1, L)$, $L \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V = W^{\pi^{\mathbb{X}}} = 1 + L \cdot \mathbb{X}$ が成立する. 今, $\pi^{\mathbb{Z}}$ の取り方より

$$W_T^{\pi^{\mathbb{Z}}} \begin{cases} \geq \frac{1}{V_T} & \text{a.s.} \\ > \frac{1}{V_T} & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.10}$$

が成立する. したがって

$$(L \cdot \mathbb{X})_T = W_T^{\pi^{\mathbb{Z}}} V_T - 1 \begin{cases} \geq 0 & \text{a.s.} \\ > 0 & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.11}$$

となり, $\mathbb{X}$ は $(NA)_{\mathrm{small}}$ を満たさない.

(B) $\mathbb{Z}$ が $(NA)_{\mathrm{small}}$ を満たさないと仮定する. このときある $K \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ が存在し,

$$(K \cdot \mathbb{Z})_T \begin{cases} \geq 0 & \text{a.s.} \\ > 0 & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.12}$$

となる. $\pi^{\mathbb{Z}} = (1, K)$ に対し, 補題 5.18 よりある $\pi^{\mathbb{X}} = (1, L)$, $L \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi^{\mathbb{Z}}} V = W^{\pi^{\mathbb{X}}}$ が成立する. したがって

$$W_T^{\pi^{\mathbb{X}}} = W_T^{\pi^{\mathbb{Z}}} V_T = (1 + (K \cdot \mathbb{Z})_T) V_T \begin{cases} \geq V_T & \text{a.s.} \\ > V_T & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.13}$$

となる. ゆえに $\pi^{\mathbb{X}}$ は $\mathbb{X}$ における V_T の $(DP)_{\mathrm{small}}$ である.

(ii) 補題 5.18(ii) に注意して, (i) と全く同様に示せる.

(iii) (A) $(\pi_n^{\mathbb{Z}})_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{Z}$ における $\frac{1}{V_T}$ の $(ADP1)$ であるとする. このときある $\epsilon_n \downarrow 0$ および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

- $\pi_n^{\mathbb{Z}}(\epsilon_n, K^n)$, $K^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ かつ
- $\mathbb{P}\left\{W_T^{\pi_n^{\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{V_T}\right\} \geq \alpha$

が成立する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 補題 5.18 よりある $\pi_n^{\mathbb{X}} = (\epsilon_n, L^n)$, $L^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi_n^{\mathbb{Z}}}V = W^{\pi_n^{\mathbb{X}}}$ が成立する. このとき

$$W_T^{\pi_n^{\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{V_T} \ \Leftrightarrow \ W_T^{\pi_n^{\mathbb{X}}} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ (L^n \cdot \mathbb{X})_T \geq 1 - \epsilon_n \tag{5.14}$$

となる. そこで $\widetilde{L}^n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} L^n$ と置くと, $\widetilde{L}^n \in \mathcal{H}_{\sqrt{\epsilon_n}}^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ かつ

$$\mathbb{P}\left\{(\widetilde{L}^n \cdot \mathbb{X})_T \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon_n}} - \sqrt{\epsilon_n}\right\} \geq \alpha \tag{5.15}$$

が成立する. $\epsilon_n \downarrow 0$ に注意して, $(\widetilde{L}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{X}$ における $(AA1)$ となる.

(B) $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{Z}$ における $(AA1)$ であるとする. このときある $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$, および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

- $K^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}$ かつ
- $\mathbb{P}\{(K^n \cdot \mathbb{Z})_T \geq c_n\} \geq \alpha$

が成立する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_n^{\mathbb{Z}} = (\epsilon_n, K^n)$ と置くと, 補題 5.18 よりある $\pi_n^{\mathbb{X}} = (\epsilon_n, L^n)$, $L^n \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi_n^{\mathbb{Z}}}V = W^{\pi_n^{\mathbb{X}}}$ が成立する. このとき

$$(K^n \cdot \mathbb{Z})_T \geq c_n \ \Leftrightarrow \ W_T^{\pi_n^{\mathbb{X}}} \geq (\epsilon_n + c_n)V_T \tag{5.16}$$

となる. そこで $\delta_n = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_n + c_n}$, $\widetilde{L}^n = \frac{1}{\epsilon_n + c_n} L^n$, $\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}} = (\delta_n, \widetilde{L}^n)$ と置くと, $\widetilde{L}^n \in \mathcal{H}_{\delta_n}^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ かつ

$$\mathbb{P}\{W_T^{\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}}} \geq V_T\} \geq \alpha \tag{5.17}$$

が成立する. $\delta_n \downarrow 0$ に注意して, $(\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{X}$ における V_T の $(ADP1)$ となる.

(iv) (A) $(\pi_n^{\mathbb{Z}})_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{Z}$ における $\frac{1}{V_T}$ の $(ADP2)$ であるとする. このときある $c \in (0, 1)$ が存在し,

- 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_n^{\mathbb{Z}}(c, K^n)$, $K^n \in \mathcal{H}_c^{\mathrm{small}}(\mathbb{Z})$ かつ
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{W_T^{\pi_n^{\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{V_T}\right\} = 1$

が成立する. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 補題 5.18 よりある $\pi_n^{\mathbb{X}} = (c, L^n)$, $L^n \in \mathcal{H}_c^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi_n^{\mathbb{Z}}}V = W^{\pi_n^{\mathbb{X}}}$ が成立する. このとき

$$W_T^{\pi_n^{\mathbb{Z}}} \geq \frac{1}{V_T} \ \Leftrightarrow \ W_T^{\pi_n^{\mathbb{X}}} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ (L^n \cdot \mathbb{X})_T \geq 1 - c \tag{5.18}$$

となる. そこで $\widetilde{L}^n = \frac{1}{c} L^n$ と置くと, $\widetilde{L}^n \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{(\widetilde{L}^n \cdot \mathbb{X})_T \geq \frac{1}{c} - 1\right\} = 1 \tag{5.19}$$

が成立する. $\frac{1}{c} - 1 > 0$ に注意して, $(\widetilde{L}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{X}$ における $(AA2)$ となる.

(B) $(K^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{Z}$ における $(AA2)$ であるとする. このとき

- 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $K^n\in\mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ かつ
- ある $c>0$ が存在し, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{(K^n\cdot\mathbb{Z})_T\geq c\}=1$

が成立する. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $\pi_n^{\mathbb{Z}}=(c,K^n)$ と置くと, 補題 5.18 よりある $\pi_n^{\mathbb{X}}=(1,L^n)$, $L^n\in\mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $W^{\pi_n^{\mathbb{Z}}}V=W^{\pi_n^{\mathbb{X}}}$ が成立する. このとき

$$(K^n\cdot\mathbb{Z})_T\geq c \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1+c}(1+(L^n\cdot\mathbb{X})_T)\geq V_T \tag{5.20}$$

となる. そこで $\widetilde{c}=\frac{1}{1+c}$, $\widetilde{L}^n=\frac{1}{1+c}L^n$, $\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}}=(\widetilde{c},\widetilde{L}^n)$ と置くと, $\widetilde{L}^n\in\mathcal{H}_{\widetilde{c}}^{\mathrm{small}}(\mathbb{X})$ かつ

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{W_T^{\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}}}\geq V_T\}=1 \tag{5.21}$$

が成立する. $\widetilde{c}\in(0,1)$ に注意して, $(\widetilde{\pi}_n^{\mathbb{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{X}$ における V_T の $(ADP2)$ となる.

□

次の命題は small market における先行研究 [28] の結果の large financial market への一般化である.

命題 5.19. $\mathbb{S}$ を $(NUPBR)$ を満たす large financial market とする. $\mathbb{H}\in\mathcal{H}_1^{\mathrm{large}}$ とし, $W^{\mathbb{H}}=1+\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ と置く. $W_T^{\mathbb{H}}>0$ a.s. と仮定する. このとき

$$\inf_{t\in[0,T]}W_t^{\mathbb{H}}>0 \text{ a.s.} \tag{5.22}$$

が成立する.

証明. $A=\{\inf_{t\in[0,T]}W_t^{\mathbb{H}}=0\}$ と置く. $\mathbb{P}(A)=0$ を示す. $\mathbb{P}(A)=\delta>0$ と仮定して矛盾を導く.

$$A_n=A\cap\left\{W_T^{\mathbb{H}}\geq\frac{1}{n}\right\} \tag{5.23}$$

と置くと, 仮定より $\mathbb{P}(A_n)\uparrow\mathbb{P}(A)$ となる. すなわち, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在し, $n\geq N$ なる任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $\mathbb{P}(A_n)\geq\frac{\delta}{2}$ が成立する. 一方, $\mathbb{H}\in\mathcal{H}_1^{\mathrm{large}}$ より, ある列 $(H^k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ が存在し, $H^k\cdot\mathbb{S}\xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}}\mathbb{H}\cdot\mathbb{S}$ が成立する. $W^k=1+H^k\cdot\mathbb{S}$, $k\in\mathbb{N}$ と置くと, $W^k\xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{S}}W^{\mathbb{H}}$, 特に $[0,T]$ 上で $W^k\xrightarrow[k\to\infty]{\mathrm{up}}W^{\mathbb{H}}$ となる. したがって各 $n\geq N$ および $\epsilon\in(0,\frac{1}{2n})$ に対し

$$\mathbb{P}\left(\left\{\inf_{t\in[0,T]}W_t^k\geq\epsilon \text{ or } W_T^k<\frac{1}{n}-\epsilon\right\}\cap A_n\right)\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}0 \tag{5.24}$$

が成立する. さらに各 $k\in\mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \mathbb{P}(A_n)-\mathbb{P}\left(\left\{\inf_{t\in[0,T]}W_t^k<\epsilon \text{ and } W_T^k\geq\frac{1}{n}-\epsilon\right\}\cap A_n\right)\\ &\geq \frac{\delta}{2}-\mathbb{P}\left\{\inf_{t\in[0,T]}W_t^k<\epsilon \text{ and } W_T^k\geq\frac{1}{n}-\epsilon\right\}\end{aligned} \tag{5.25}$$

となる. したがって, 各 $n \geq N$, $\epsilon = \frac{1}{n^2}$ に対しある $k_n \in \mathbb{N}$ が存在し,

$$\mathbb{P}\left\{\inf_{t\in[0,T]} W_t^{k_n} < \frac{1}{n^2} \text{ and } W_T^{k_n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right\} \geq \frac{\delta}{4} \tag{5.26}$$

が成立する.

今, 各 $n \geq N$ に対し

$$B_n = \left\{\inf_{t\in[0,T]} W_t^{k_n} < \frac{1}{n^2} \text{ and } W_T^{k_n} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right\}, \tag{5.27}$$

$$\tau_n = \inf\left\{t \in [0,T] \mid W_t^{k_n} \leq \frac{1}{n^2}\right\} \wedge T \tag{5.28}$$

と置くと, $\mathbb{P}(B_n) \geq \frac{\delta}{4}$ かつ $B_n \subset \{\tau_n < T\}$ となる. そこで $K^n = n^2 H^{k_n} \mathbb{1}_{\rrbracket \tau_n, T \rrbracket}$ と置くと, $K^n \in L^{\mathrm{small}}(\mathbb{S})$ かつ

$$(K^n \cdot \mathbb{S})_t = \begin{cases} 0 & \text{on } \{t < \tau_n\} \\ n^2(W_t^{k_n} - W_{\tau_n}^{k_n}) \geq -1 & \text{on } \{t \geq \tau_n\} \end{cases}, \tag{5.29}$$

したがって $K^n \in \mathcal{H}_1^{\mathrm{small}}$ となる. さらに

$$(K^n \cdot \mathbb{S})_T = n^2(W_T^{k_n} - W_{\tau_n}^{k_n}) \geq n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) = n - 2 \text{ on } B_n \tag{5.30}$$

より, $\mathbb{P}\{(K^n \cdot \mathbb{S})_T \geq n-2\} \geq \frac{\delta}{4}$ が成立する. これは任意の $n \geq N$ に対して成立するので, 仮定 $(NUPBR)$ に矛盾する. □

例 5.20. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Large financial market $\mathbb{X} = ((S^n)_{n\in\mathbb{N}}, 1, V)$ を次で定義する;

$$\begin{cases} S_t^n = 0, & \forall t \in [0,T),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ S_T^n = Y_n, & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \begin{cases} V_t = 1, & \forall t \in [0,T) \\ V_T = \xi \end{cases}. \tag{5.31}$$

ただし $\{(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \xi\}$ は独立であり,

$$\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = p_n,\ \mathbb{P}\{Y_n = -1\} = 1 - p_n,\ p_n \in (0,1),\ p_n \uparrow 1 \tag{5.32}$$

かつ ξ はパラメータ 1 の指数分布に従うとする. $\mathbb{X}$ により生成されるフィルトレーション $\mathbb{F}$ を考える.

このとき有限次元可予測過程 H は確定的な関数となり, その確率積分 $(H \cdot \mathbb{X})_T$ はあるベクトル $(h_k)_{k=0}^d \in \mathbb{R}^{d+1}$ により

$$(H \cdot \mathbb{X})_T = h_0(\xi - 1) + \sum_{k=1}^d h_k Y_k \tag{5.33}$$

と書ける. そこで可予測過程 H を $H = (h_k)_{k=0}^d$ などと表す. $\lambda > 0$ に対し

$$\mathcal{H}_\lambda^{\mathrm{small}} = \bigcup_{d\in\mathbb{N}} \left\{H = (h_k)_{k=0}^d \in \mathbb{R}^{d+1} \mid h_0 \geq 0 \text{ かつ } h_0 + \sum_{k=1}^d |h_k| \leq \lambda\right\} \tag{5.34}$$

となる.

この設定の下, $\mathbb{X}$ の無裁定条件について考える.

命題 5.21. $\mathbb{X}$ は $(NA)_{\text{small}}$ および $(NAA1)$ ($\Leftrightarrow$ $(NUPBR)$) を満たすが, $(NA)_{\text{large}}$ と $(NAA2)$ は満たさない.

証明. $\mathbb{X}$ が $(NA)_{\text{small}}$ を満たさないと仮定する. このときある $H = (h_k)_{k=0}^d \in \mathcal{H}_1^{\text{small}}(\mathbb{X})$ が存在し,

$$(H \cdot \mathbb{X})_T = h_0(\xi - 1) + \sum_{k=1}^d h_k Y_k \begin{cases} \geq 0 & \text{a.s.} \\ > 0 & \text{with positive probability} \end{cases} \tag{5.35}$$

となる. さらに admissibility より $h_0 \geq 0$ かつ $h_0 + \sum_{k=1}^d |h_k| \leq 1$ が成立する. 今, $\{(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}, \xi\}$ は独立であり, 各 Y_k は正の確率で ± 1 の値を取ることに注意して, $(H \cdot \mathbb{X})_T \geq 0$ a.s. より

$$h_0 \xi \geq h_0 + \sum_{k=1}^d |h_k| \text{ a.s.} \tag{5.36}$$

とならなければならない. もし $h_0 > 0$ なら

$$\xi \geq 1 + \frac{1}{h_0} \sum_{k=1}^d |h_k| > 0 \text{ a.s.} \tag{5.37}$$

となるが, これは ξ の取り方に反する. よって $h_0 = 0$ である. したがって, admissibility に注意して, $h_1 = \cdots, h_d = 0$, ゆえに $(H \cdot \mathbb{X})_T = 0$ a.s. となる. これは $(H \cdot \mathbb{X})_T > 0$ with positive probavility に矛盾する. したがって $\mathbb{X}$ は $(NA)_{\text{small}}$ を満たす.

次に, $\mathbb{X}$ が $(NAA1)$ を満たさない, すなわち $(AA1)$ $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在すると仮定する. このときある $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$, および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

(Adm) $H^n = (h_k^n)_{k=0}^{d(n)} \in \mathcal{H}_{\epsilon_n}^{\text{small}}(\mathbb{X})$ (i.e. $h_0^n \geq 0$ かつ $h_0^n + \sum_{k=1}^{d(n)} |h_k^n| \leq \epsilon_n$) かつ

(Arb) $\mathbb{P}\{(H^n \cdot \mathbb{X})_T \geq c_n\} \geq \alpha$ (i.e. $\mathbb{P}\{h_0^n(\xi - 1) + \sum_{k=1}^{d(n)} h_k^n Y_k \geq c_n\} \geq \alpha$)

が成立する. (Adm) より特に $h_0 \in [0, \epsilon_n]$, $\sum_{k=1}^{d(n)} |h_k^n| \leq \epsilon_n$, ゆえに

$$(H^n \cdot \mathbb{X})_T = h_0^n(\xi - 1) + \sum_{k=1}^{d(n)} h_k^n Y_k \leq \epsilon_n \xi + \epsilon_n \tag{5.38}$$

となる. したがって (Arb) より

$$\mathbb{P}\left\{\xi \geq \frac{c_n}{\epsilon_n} - 1\right\} \geq \alpha \tag{5.39}$$

となるが, $\epsilon_n \downarrow 0$, $c_n \uparrow \infty$ より, 矛盾. したがって $\mathbb{X}$ は $(NAA1)$ を満たす.

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n = (0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ を考える. このとき $H^n \in \mathcal{H}_1^{\text{small}}$ かつ

$$(H^n \cdot \mathbb{X})_T = S_T^n = Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1 \tag{5.40}$$

となる. ゆえに $\mathbb{H} = (H^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{H}_1^{large}(\mathbb{X})$ かつ $(\mathbb{H} \cdot \mathbb{X})_T = 1$ a.s. となり, $\mathbb{X}$ は $(NA)_{\text{large}}$ を満たさないことが示せた. さらにこの $(H^n)_{n\in\mathbb{N}}$ は明らかに $(AA2)$ でもあり, $\mathbb{X}$ が $(NAA2)$ を満たさないことがわかる. □

次に, 基準財を変更し, 新しい large financial market $\mathbb{Z} = ((\frac{S^n}{V}))_{n\in\mathbb{N}}, \frac{1}{V}, 1)$ を考える. $\mathbb{Z}$ に関する無裁定条件を調べるために, $\mathbb{X}$ における V_T の dominating condition を調べる.

命題 5.22. V_T は $\mathbb{X}$ において $(NDP)_{\text{small}}$, $(NGDP)$, $(NADP1)$, $(NADP2)$ を満たす.

証明. $\underline{(NDP)_{\text{small}}}$

$\mathbb{X}$ において V_T に関する $(DP)_{\text{small}}$ $\pi = (1, H)$, $H = (h_k)_{k=0}^d \in \mathcal{H}_1^{\text{small}}(\mathbb{X})$ が存在したと仮定し, 矛盾を導く. このとき次が成立する;

(Adm) $h_0 \geq 0$ かつ $h_0 + \sum_{k=1}^d |h_k| \leq 1$;

(Dom)

$$W_T^\pi = 1 + h_0(\xi - 1) + \sum_{k=1}^d h_k Y_k \begin{cases} \geq \xi & \text{a.s.} \\ > \xi & \text{with positive probability} \end{cases}. \tag{5.41}$$

(Dom) より $(1 - h_0)\xi \leq 1 - h_0 + \sum_{k=1}^d |h_k|$ a.s. が成立する. もし $h_0 < 1$ なら $\xi \leq 1 + \frac{1}{1-h_0}\sum_{k=1}^d |h_k| < \infty$ a.s. となり, ξ の取り方に矛盾する. したがって, (Adm) より $h_0 = 1$, $h_1 = \cdots, h_d = 0$ となる. しかしこのとき $W_T^\pi = \xi$ となり, (Dom) に矛盾する.

$\underline{(NGDP)}$

$\mathbb{X}$ において V_T に関する (GDP) $\pi = (1, \mathbb{H})$, $\mathbb{H} \in \mathcal{H}_1^{\text{large}}(\mathbb{X})$ が存在したと仮定し, 矛盾を導く. $\mathbb{H} \in \mathcal{H}_1^{\text{large}}(\mathbb{X})$ より, ある列 $(H^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1^{\text{small}}(\mathbb{X})$ が存在し, $(H^n \cdot \mathbb{X})_T \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{H} \cdot \mathbb{X}$ となる. $\mathbb{P}\{W_T^\pi > V_T\} > 0$ より, ある $\delta \in (0, 1)$ および $N \in \mathbb{N}$ が存在し, 任意の $n \geq N$ に対し

$$\mathbb{P}\{1 + (H^n \cdot \mathbb{X})_T \geq V_T + \delta\} > 0 \tag{5.42}$$

が成立する. さらに, $W_T^\pi \geq V_T$ a.s. より, 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $n = n(\epsilon) \geq N$ が存在し,

$$\mathbb{P}\{1 + (H^n \cdot \mathbb{X})_T \geq V_T - \epsilon\} \geq 1 - \epsilon \tag{5.43}$$

が成立する. 今, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n = (h_k^n)_{k=0}^{d(n)} \in \mathcal{H}_1^{\text{small}}(\mathbb{X})$, すなわち $h_0^n \geq 0$ かつ $h_0^n + \sum_{k=1}^{d(n)} |h_k^n| \leq 1$ が成立する. したがって, 各 $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$1 + (H^n \cdot \mathbb{X})_T \geq V_T + x \implies (1 - h_0^n)\xi \leq 2(1 - h_0^n) - x \tag{5.44}$$

となる. $x = \delta > 0$ を考えると, 任意の $n \geq N$ に対し $\mathbb{P}\{(1 - h_0^n)\xi \leq 2(1 - h_0^n) - \delta\} > 0$ となる. したがって $h_0^n < 1$ かつ $\mathbb{P}\{\xi \leq 2 - \frac{\delta}{1-h_0^n}\} > 0$, ゆえに $h_0^n < 1 - \frac{\delta}{2}$ となる. 一方, 任意の $\epsilon > 0$ に対し $x = -\epsilon$ を考えると, $n = n(\epsilon) \geq N$ に対し

$$\mathbb{P}\{(1 - h_0^n)\xi \leq 2(1 - h_0^n) + \epsilon\} \geq 1 - \epsilon, \tag{5.45}$$

したがって, $h_0^n < 1 - \frac{\delta}{2}$ に注意して

$$\mathbb{P}\left\{\xi \leq 2 + \frac{2}{\delta}\epsilon\right\} \geq 1 - \epsilon \tag{5.46}$$

となる. $\epsilon \downarrow 0$ とすると矛盾が生じる.

$\underline{(NADP1)}$

$\mathbb{X}$ において V_T に関する $(ADP1)$ $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在したと仮定し, 矛盾を導く. このときある $\epsilon_n \downarrow 0$ および $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

(Adm) $H^n = (h^n_k)_{k=0}^{d(n)} \in \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_{\epsilon_n}(\mathbb{X})$ (i.e. $h^n_0 \geq 0$ かつ $h^n_0 + \sum_{k=1}^{d(n)} |h^n_k| \leq \epsilon_n$) かつ

(Dom) $\mathbb{P}\{W^{\pi^n}_T \geq V_T\} \geq \alpha$ (i.e. $\mathbb{P}\{\epsilon_n + h^n_0(\xi-1) + \sum_{k=1}^{d(n)} h^n_k Y_k \geq \xi\} \geq \alpha$)

が成立する. (Adm) より

$$\epsilon_n + h^n_0(\xi - 1) + \sum_{k=1}^{d(n)} h^n_k Y_k \geq \xi \ \Rightarrow\ \xi \leq \frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n} \tag{5.47}$$

となる. したがって (Dom) より $\mathbb{P}\{\xi \leq \frac{\epsilon_n}{1-\epsilon_n}\} \geq \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$ となるが, $\epsilon_n \downarrow 0$ より, ξ の取り方に矛盾する.

$\underline{(NADP2)}$

$\mathbb{X}$ において V_T に関する $(ADP2)$ $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在したと仮定し, 矛盾を導く. このときある $c \in (0,1)$ が存在し,

(Adm) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $H^n = (h^n_k)_{k=0}^{d(n)} \in \mathcal{H}^{\mathrm{small}}_c(\mathbb{X})$ かつ

(Dom) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{W^{\pi^n}_T \geq V_T\} = 1$

が成立する. 上と同様に, (Adm) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$c + h^n_0(\xi - 1) + \sum_{k=1}^{d(n)} h^n_k Y_k \geq \xi \ \Rightarrow\ \xi \leq \frac{c}{1-c} \tag{5.48}$$

となる. したがって (Dom) より $\mathbb{P}\{\xi \leq \frac{c}{1-c}\} = 1$ となるが, これは ξ の取り方に矛盾する. □

したがって, 定理 5.17 より $\mathbb{Z}$ は $(NA)_{\mathrm{small}}$, $(NA)_{\mathrm{large}}$, $(NAA1)$ ($\Leftrightarrow (NUPBR)$), $(NAA2)$ を満たす. Large financial market における数理ファイナンスの基本定理より $\mathbb{Z}$ は (ESM) を満たす.

しかし, $\mathbb{Z}$ は $(E\sigma M)$ を満たさないことがわかる. 今の場合, σ-マルチンゲールとマルチンゲールは一致するので, $(E\sigma M) \Leftrightarrow (EMM)$ であることに注意する.

命題 5.23. $\mathbb{Z}$ は (EMM) を満たさない.

証明. $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^e(\mathbb{Z})$ が存在したと仮定する. このとき $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{\xi}] = 1$ かつ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{Y_n}{\xi}] = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ となる. 今, $\mathbb{P}\{Y_n = 1\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ かつ $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ より $\mathbb{Q}\{Y_n = 1\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ となる. したがって, 優収束定理 ($\xi \in L^1(\mathbb{Q})$ に注意) より

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{Y_n}{\xi}\right] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\xi}\right] \tag{5.49}$$

となり, 矛盾が生じる. □

注意 . 上の例は非常に簡単な 1 期間 large financial market であるが, この設定でも次のような非自明な結果が従うことが示せた;

(i) $\mathbb{X}$ は $(NA)_{\mathrm{small}}$ を満たすが $(NA)_{\mathrm{large}}$ は満たさない;

(ii) 基準財変更により $(NA)_{\mathrm{large}}$, $(NAA2)$ が保存しない;

(iii) $\mathbb{Z}$ は (ESM) を満たすが $(E\sigma M)$ ($\Leftrightarrow (EMM)$) は満たさない.

今後の課題

例 5.20 からわかる通り, 無裁定条件 $(NA)_{\text{large}}$, $(NFLVR)_{\text{large}}$ は基準財変更により保存しない. またこのような現象は small market においても見られる [11]. これは非常に奇妙な結論であると言える. 実際は, どのような基準財で価格を計算しても「無裁定」という定性的な性質は不変であると考えられる. そのため, 無裁定条件が保存するような「良い基準財」を考えるか,「無裁定」の概念を基準財の取り方に依存しないように定義し直す必要があると考える. 後者のアプローチは最近の研究 [15] で試みられているが, この論文では small market の枠組みに限定されている. 今後の研究では large financial market の枠組みで基準財の取り方に依存しないような (近似的) 無裁定の概念を定式化する必要があると考える.

また, 無裁定理論で頻繁に現れる $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の凸集合の性質についても研究の余地がある. 無裁定理論に限らず, 数理ファイナンス全般において, 同値確率測度の変換のテクニックがしばしば用いられる. クレームの集合や無裁定条件などの定性的な対象は同値確率測度の変換で不変であることが要請される. このような観点に立つと, 数理ファイナンスの諸概念において考えるべき確率変数のクラスとしては $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ か $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ に限定される. しかし $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は考察対象として小さすぎると考えられており, したがって $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が最も重要な考察対象となる. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は自明な場合を除いて局所凸ではない位相線形空間である. そのため局所凸空間における関数解析学の強力な理論 (Hahn-Banach の定理や Minimax 定理, 双極定理など) がそのままでは使えないという難点がある. 無裁定理論からの要請から, 近年は $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ における実解析的な研究が C. Kardaras, G. Žitković, W. Schachermayer らを中心に盛んに研究されている ([3], [20], [21], [29]). 特に [20] では基準財 (numéraire) の概念が $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の一般の凸集合に対して定義され, その特徴づけがなされている. 数理ファイナンスの研究から実解析的な新しい理論が展開することは非常に興味深い. 今後は無裁定理論の研究経験を活かし, $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ の凸集合の構造に関する理論の発展にも貢献したいと考えている.

謝辞

本研究にあたり, 長期間にわたり, 終始丁寧な御指導を頂いた京都大学大学院理学研究科教授重川一郎先生に深謝いたします.

また, ディスカッションを通して多くの御助言を頂いた ETH. Zurich 教授 Freddy Delbaen 氏, 大阪大学大学院基礎工学研究科教授関根順先生, 一橋大学大学院商学研究科教授高岡浩一郎先生に深くお礼申し上げます.

最後になりましたが, 日々の議論を通じて多くの知識や示唆を頂いた京都大学大学院理学研究科の世良透君, 村山拓也君, 森隆大君に深く感謝します.

参考文献

[1] M. Beiglböck, W. Schachermayer. (2011). A direct proof of the Bichteler-Dellacherie theorem and connections to arbitrage. Ann. Probab., vol. 39, no. 6, pp. 2424-2440.

[2] F. Black, M. Scholes. (1973). The principle of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, vol. 81, pp. 637-659.

[3] W. Brannath, W. Schachermayer. (1999). A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Séminaire de Probabilités XXXIII, Lecture Notes in Math, vol. 1709, pp. 349-354.

[4] A. Cherny, A. Shiryaev. (2002). A vector stochastic integral and the fundamental theorem of asset pricing. Proc. Steklov Inst. Math., vol. 237, pp. 12-56.

[5] S. Cohen, R. Elliott. (2015). Stochastic calculus and applications. Second edition. Probability and its Applications. Springer, Cham.

[6] C. Cuchiero, I. Klein, J. Teichmann. (2016). A new perspective on the fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. Theory Probab. Appl., vol. 60, no. 4, pp. 561-579.

[7] C. Cuchiero, J. Teichmann. (2015). A convergence result for the Emery topology and a variant of the proof of the fundamental theorem of asset pricing. Finance Stoch., vol. 19, pp. 743-761.

[8] F. Delbaen, W. Schachermayer. (2006). The Mathematics of Arbitrage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[9] F. Delbaen, W. Schachermayer. (1994). A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Mathematische Annalen, vol. 300, pp. 463-520.

[10] F. Delbaen, W. Schachermayer. (1998). The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes. Mathematische Annalen, vol. 312, pp. 215-250.

[11] F. Delbaen, W. Schachermayer. (1995). The No-Arbitrage Property under a Change of Numraire. Stochastics and Stochastic Reports, vol. 53, pp. 213-226.

[12] M. De Donno, M. Pratelli. (2006). Stochastic integration with respect to a sequence of semimartingales. In memoriam Paul-Andr Meyer: Sminaire de Probabilits XXXIX, Lecture Notes in Math, vol. 1874, pp. 119-135. Springer, Berlin.

[13] J. Harrison, D. Kreps. (1979). Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets. Journal of Economic Theory, vol. 20, pp. 381-408.

[14] J. Harrison, S. Pliska. (1981). Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continous Trading. Stochastic Processes and their Applications, vol. 11, pp. 215-260.

[15] M. Herdegen. (2017). No-arbitrage in a numéraire-independent modeling framework. Math. Finance, vol. 27, no. 2, pp. 568-603.

[16] J. Jacod, A. Shiryaev. (1987). Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

[17] Y. Kabanov. (1997). On the FTAP of Kreps-Delbaen-Schachermayer. Statistics and Control of Stochastic Processes, Moscow, 1995/1996. World Scientific Publshing, pp. 191-203.

[18] Y. Kabanov, D. Kramkov. (1995). Large financial markets: Asymptotic arbitrage and contiguity. Theory Probab. Appl.,vol. 39, pp. 182-187.

[19] Y. Kabanov, D. Kramkov. (1998). Asymptotic arbitrage in large financial markets. Finance Stoch., vol. 2, pp. 143-172.

[20] C. Kardaras. (2012). A structual characterization of numéraires of convex sets of nonnegative random variables. Positivity, vol. 16, no. 2, pp. 245-253.

[21] C. Kardaras, G. Žitković. (2013). Forward-convex convergence in probability of sequences of nonnegative random variables. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 141, no. 3, pp. 919-929.

[22] I. Klein. (2000). A fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. Math. Finance, vol. 10, pp. 443-458.

[23] I. Klein, W. Schachermayer. (1997). Asymptotic arbitrage in noncomplete large financial markets. Theory Probab. Appl., vol. 41, pp. 780-788.

[24] D. Kreps. (1981). Arbitrage and Equilibrium in Economics with infinitely many commodities. Journal of Mathematical Economics, vol. 8, pp. 15-35.

[25] J. Mémin. (1980). Espaces de semi Martingales et changement de probabilitité. Zeitchrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, vol. 52, pp. 9-39.

[26] 宮島静雄. (2007). 関数解析, 第 2 版. 横浜図書.

[27] P. Protter. (2003). Stochastic Integration and Differential Equations, 2nd edn. Springer, Berlin.

[28] K. Takaoka, M. Schweizer. (2014). A note on the condition of no unbounded profit with bounded risk. Finance Stoch., vol. 18, pp. 393-405.

[29] G. Žitković. (2010). Convex compactness and its applications. Math. Financ. Econ., vol. 3, no. 1, pp. 1-12.