# 正則性構造理論入門

星野 壮登

## 目 次

主な参考文献

**1 日目：序論と rough path 理論**


- N. Berglund, “An introduction to singular stochastic PDEs–Allen-Cahn equations, metastability, and regularity structures”, EMS Series of Lectures in Mathematics. EMS Press, Berlin (2022).
- 稲浜 譲, 『ラフパス理論と確率解析』, 岩波書店 (2022).
- P. K. Friz and M. Hairer, “A course on rough paths. With an introduction to regularity structures”, Springer, Cham, second edition (2020).


**2 日目：Branched rough path 理論と Hopf 代数**


- M. Gubinelli, “Ramification of rough paths”, J. Differential Equations **248** (2010), 693–721.
- D. E. Radford, “Hopf algebras”, Series on Knots and Everything **49**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2012).


**3 日目：正則性構造理論**


- M. Hairer, “A theory of regularity structures”, Invent. Math. **198** (2014), 269–504.
- Y. Bruned, M. Hairer, and L. Zambotti, “Algebraic renormalisation of regularity structures”, Invent. Math. **215** (2019), 1039–1156.


**4 日目：Model の繰り込み**


- Y. Bruned, “Recursive formulae in regularity structures”, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **6** (2018), 525–564.
- A. Chandra and M. Hairer, “An analytic BPHZ theorem for regularity structures”, arXiv:1612.08138.
- M. Hairer and R. Steele, “The BPHZ theorem for regularity structures via the spectral gap inequality”, arXiv:2301.10081.


**5 日目：SSPDE の繰り込みと pre-Lie 代数**


- Y. Bruned, A. Chandra, I. Chevyrev, and M. Hairer, “Renormalising SPDEs in regularity structures”, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23** (2021), 869–947.
- I. Bailleul and Y. Bruned, “Renormalised singular stochastic PDEs”, arXiv:2101.11949.
- Y. Bruned and D. Manchon, “Algebraic deformation for (S)PDEs”, J. Math. Soc. Japan **75** (2022), 485–526.

$\boxed{\text{記号}}$

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$：0 以上の整数全体からなる集合.
- $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$：1 以上の整数全体からなる集合.
- $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$：1 次元トーラス.
- $x = (x_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_i)_{i=1}^d \in \mathbb{N}^d$ に対して,

$$x^k := \prod_{i=1}^d x_i^{k_i}, \qquad k! := \prod_{i=1}^d k_i!, \qquad |k| := \sum_{i=1}^d k_i, \qquad \partial^k := \prod_{i=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k_i}$$

  と表す.
- $C(X;Y)$：位相空間 $X$ から位相空間 $Y$ への連続写像全体からなる集合．$Y = \mathbb{R}$ のときは $C(X)$ と表す.
- $\mathcal{L}(X,Y)$：線形空間 $X$ から線形空間 $Y$ への線形写像全体からなる集合．$X, Y$ に位相が定義されているときは，連続線形写像全体からなる集合.
- $A(x), B(x)$ を変数 $x$ の非負値関数とする．$x$ に依存しない定数 $c > 0$ が存在して，$A(x) \le cB(x)$ が成り立つとき，

$$A(x) \lesssim B(x)$$

  と表す.
- グラフ $G$ の頂点集合を $N_G$, 辺集合を $E_G$ と表す.
- $|A|$：有限集合 $A$ の要素の個数.
- $\langle A \rangle$：集合 $A$ によって生成される線形空間.
- $\mathrm{Id}_X$：線形空間 $X$ 上の恒等写像.

第 1 回の内容

- SSPDE の繰り込み
- ラフパス理論の概略

# 1 特異確率偏微分方程式

## 1.1 確率偏微分方程式

時空変数 $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ によって添字付けられた確率変数 $X(t,x) = X(t,x;\omega)$ の族（**確率場**）が満たす偏微分方程式を**確率偏微分方程式 (Stochastic Partial Differential Equation, SPDE)** という．この講義では，**ノイズ**と呼ばれる確率場 $\xi(t,x)$ が与えられたとき，それによって駆動される放物型 SPDE

$$(\partial_t - \Delta)u(t,x) = f(u(t,x), \nabla u(t,x)) + g(u(t,x))\xi(t,x) \tag{1.1}$$

を考える．変数 $\omega$ は慣例によって省略される．$\xi$ としては**（Gauss 型）時空ホワイトノイズ**：

$$\mathbb{E}[\xi(t,x)] = 0, \qquad \mathbb{E}[\xi(t,x)\xi(s,y)] = \delta(t-s)\delta(x-y) \quad \text{（デルタ関数）}$$

を満たす Gauss 型確率変数の族を主に考える．正確な定義は 6.1 章で与える．

**例 1.1.**

(1) $a \in \mathbb{R}$ を定数とし，SPDE

$$(\partial_t - \Delta)\phi(t,x) = -a\phi(t,x) - \phi(t,x)^3 + \xi(t,x) \tag{1.2}$$

を考える．$a > 0$ のときは**動的 $\phi^4_d$ 模型 (dynamical $\phi^4_d$ model)**，$a < 0$ のときは**確率 Allen-Cahn 方程式**などと呼ばれる．これは，注意 1.1（後述）のような **Langevin 方程式**を形式的に無限次元空間に拡張したものであり，

$$\mu(d\phi) = \frac{1}{Z}\exp\left\{-2\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}|\nabla\phi(x)|^2 + \frac{a}{2}\phi(x)^2 + \frac{1}{4}\phi(x)^4\right)dx\right\}\prod_{x\in\mathbb{R}^d} d\phi(x)$$

という（超）関数空間上の確率測度を唯一の不変測度としてもつと考えられる．Parisi と Wu [115] は，この測度を不変測度としてもつような Markov 過程を構成するために，方程式 (1.2) を考案した．

(2) Kardar, Parisi, Zhang [94] は，界面のランダムな成長を表すモデルとして，**KPZ 方程式**

$$(\partial_t - \Delta)h(t,x) = |\nabla h(t,x)|^2 + \xi(t,x) \tag{1.3}$$

を考案した．$h(t,x)$ は時刻 $t$, 位置 $x$ における界面の高さを表す．

**注意 1.1.**
$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $C^2$ 級で，$0 < \inf V'' \le \sup V'' < \infty$ を満たすとする．$\{B_t\}_{t\ge0}$ を 1 次元標準 Brown 運動とし，確率微分方程式

$$dX_t = -V'(X_t)dt + dB_t$$

を考える．この方程式の解 $X_t$ の分布は，$t \to \infty$ のとき $\frac{1}{Z}e^{-2V(x)}dx$ ($Z := \int_{\mathbb{R}} e^{-2V(x)}dx$) という $\mathbb{R}$ 上の確率測度に収束する．

**問 1.**
$V(x)=x^2$ のとき，$X_0=x\in\mathbb{R}$ を出発する解 $X_t^x$ の分布を求めよ．

### 1.2 SPDE (1.1) の適切性/非適切性

SPDE (1.1) を解くには，まず適切な関数空間を設定しなければならない．(1.1) は放物型の方程式だから，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ 上の放物型距離

$$\|(t_1,x_1)-(t_2,x_2)\|_{\mathfrak{s}}:=|t_1-t_2|^{\frac{1}{2}}+|x_1-x_2|$$

に基づく **Hölder-Besov 空間** $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha}$ $(=B_{\infty,\infty,\mathfrak{s}}^{\alpha})$ を用いると便利である．$\alpha<0$ の場合の正確な定義は 4.2 章で行うが，このとき $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha}$ の元は一般に超関数となる．

**命題 1.1 ([7, Theorem 2.82], [69, Proposition 4.14]).**
$\alpha+\beta>0$ のとき，連続双線形写像 $M:\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha}\times\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\beta}\to\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha\wedge\beta}$ で，連続関数 $f,g$ に対しては

$$M(f,g)(z)=f(z)g(z)\qquad(z\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$$

を満たすものが一意的に存在する．

例として，動的 $\phi_d^4$ 模型 (1.2) を解くための関数空間を考えよう．以下，$\alpha\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha-}:=\bigcap_{\beta<\alpha}\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\beta}$ と表す．時空ホワイトノイズ $\xi$ は確率 1 で $\mathcal{C}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}^{-\frac{d+2}{2}-}$ に属するため（命題 6.1），Schauder 評価により，未知関数 $\phi$ は $\mathcal{C}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}^{\frac{2-d}{2}-}$ に属する．$d=1$ ならば問題ないが，$d\geq 2$ では $\phi$ が超関数となるため，非線形項 $\phi^3$ を標準的な意味で定義できない．このような SPDE を**特異確率偏微分方程式 (singular SPDE, SSPDE)** という．

### 1.3 SSPDE の繰り込み

超関数の積をそのまま扱うのは無理なので，解を近似的に捉えることを考える．$\int\rho(t,x)dtdx=1$ を満たす関数 $\rho\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{1+d})$ をとり，各 $n\in\mathbb{N}_+$ に対して

$$\rho_n(t,x):=n^{2+d}\rho(n^2t,nx),\qquad\xi_n(t,x):=(\xi*\rho_n)(t,x)$$

とおく．このとき $\xi_n$ は確率 1 で滑らかな関数であり，$n\to\infty$ のとき $\xi$ に収束する．(空間変数 $x$ のみの畳み込みを考えることもある．) 以下，簡単のため $x$ の定義域を $\mathbb{T}^d=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ として考える．

**命題 1.2 ([78]).**
$u_0\in\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{0-}(\mathbb{T}^2)$ とする．2 次元確率 Allen-Cahn 方程式

$$\begin{cases}(\partial_t-\Delta)u_n=u_n-u_n^3+\xi_n, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{T}^2\\ \qquad u_n|_{t=0}=u_0 & x\in\mathbb{T}^2\end{cases}$$

の解 $u_n$ は，$n\to\infty$ のとき 0 に確率収束する．ただし，$\xi_n$ は $x$ のみの畳み込みで定義する．

一方，**繰り込み**と呼ばれる変形を行えば，非自明な極限を得られることがある．

**定理 1.3 ([38, 69, 60]).**
$d=2,3$ とする．ランダムでない定数の列 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ で，任意の $\phi_0\in\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\frac{2-d}{2}-}(\mathbb{T}^d)$ に対し，動的 $\phi_d^4$ 模型

$$\begin{cases}(\partial_t-\Delta)\phi_n=-\phi_n^3+C_n\phi_n+\xi_n, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{T}^d\\ \qquad \phi_n|_{t=0}=\phi_0 & x\in\mathbb{T}^d\end{cases}$$

の解 $\phi_n$ が $n\to\infty$ のとき確率収束するようなものが存在する．この定数 $C_n$ は

$$C_n=\begin{cases}O(\log n) & (d=2)\\ O(n) & (d=3)\end{cases}$$

を満たし，さらに $\phi:=\lim_{n\to\infty}\phi_n$ が $\rho$ のとり方に依らないように選ぶことができる．また，$\phi$ の分布は Gauss 型ではない．

**注意 1.2.**
$\phi$ が満たす方程式を，形式的に

$$(\partial_t-\Delta)\phi(t,x)=-\phi(t,x)^3+\infty\phi(t,x)+\xi(t,x)$$

と表すことがある．

## 1.4 証明の概略

Da Prato と Debussche [38] による，$d=2$ の場合の証明の概略を説明する．初期条件はあまり重要ではないので無視する．まず，解の分解 $\phi_n=X_n+Y_n$ を，

$$\begin{cases}(\partial_t-\Delta)X_n=\xi_n,\\ (\partial_t-\Delta)Y_n=-(X_n^3-3c_nX_n)-3(X_n^2-c_n)Y_n-3X_nY_n^2-Y_n^3\end{cases}$$

（ただし $c_n=\frac{1}{3}C_n$）によって定める．

- $X_n$ の regularity は $0-$ と低いが，線形方程式の解であるため**確率論的には扱いやすい**．特に，Gauss 型確率変数の性質を使うと，$X_n^2-c_n$ と $X_n^3-3c_nX_n$ が $n\to\infty$ のとき確率収束することを証明できる．
- $Y_n$ は非線形方程式の解だが，Schauder 評価により regularity が $2-$ となるため，**通常の PDE の議論を適用できる**．特に，任意に与えられた外力項の組 $\mathbb{X}=(X,X^{:2:},X^{:3:})\in(\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{0-})^3$ に対して，方程式

  $$(\partial_t-\Delta)Y=-X^{:3:}-3X^{:2:}Y-3XY^2-Y^3$$

  はただ一つの時間大域解をもち，さらに解写像 $\mathbb{X}\in(\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{0-})^3\mapsto Y\in\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{2-}$ は連続である．

以上の議論を図式にまとめる．実線は連続写像を，破線は超関数にまでは連続拡張できない写像を表す．

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{R} \circlearrowright \mathbb{X} \arrow[r, mapsto, "\mathbb{S}"] & (X,Y) \arrow[d, mapsto, "+"] \\
\xi \arrow[u, mapsto, dashed, "\iota"] \arrow[r, mapsto, dashed, "S"] & \phi
\end{tikzcd}$$

下部右向き矢印 $S : \xi \mapsto \phi$ は，$\xi$ が十分滑らかな場合の方程式

$$(\partial_t - \Delta)\phi = -\phi^3 + \xi$$

の解写像を表す．この写像はホワイトノイズ $\xi$ を許容するようには連続拡張できないため，代わりに**拡張されたノイズ** $\mathbb{X}$ と**拡張された解写像** $\mathbb{S} : \mathbb{X} \mapsto (X, Y)$ を考える．これと和 $\phi = X+Y$ の連続性から，拡張されたノイズの列 $\{\mathbb{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ が収束すれば，対応する $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ も収束することが分かる．ここまでは決定論的な PDE の議論であり，確率論は全く使われていない．さて，$\xi_n$ を標準的に持ち上げた

$$\iota(\xi_n) = (X_n, X_n^2, X_n^3)$$

を考えると，これ自体は収束しない．しかし，定数 $c_n = \mathbb{E}[X_n^2]$ をとれば，その変形

$$\mathbb{X}_n := \mathfrak{R}_n \iota(\xi_n) = (X_n, X_n^2 - c_n, X_n^3 - 3c_n X_n)$$

は収束することが分かる．確率論が使われるのはここだけである．この $\mathbb{X}_n$ に対応する $\phi_n$ が

$$(\partial_t - \Delta)\phi_n = -\phi_n^3 + 3c_n\phi_n + \xi_n$$

を満たすことから，定理 1.3 が得られる．極限の非自明性（Gauss でないこと）については [60] を参照せよ．

$d = 3$ の場合は Da Prato と Debussche の手法をそのまま用いることはできないが，Hairer [68, 69] は **rough path 理論** [98, 57] の考え方を持ち込むことで，上記の手法を $d = 3$ に拡張することに成功した．Hairer が導入した新しい手法を**正則性構造 (regularity structure) 理論**という．この理論が特に優れているのは，動的 $\phi_d^4$ 模型だけでなく，KPZ 方程式など他の多くの SSPDE を統一的に扱えることである．

**定理 1.4 ([69, 23, 31, 21]).**
方程式 (1.1) を $x \in \mathbb{T}^d$ の下で考える．$d$ がある臨界次元未満であり，またノイズ以外の「反復積分」の regularity が低すぎなければ，方程式 (1.1) は繰り込み可能である．

次元に関する 1 つ目の条件について，本質的なのは「(1.1) **の右辺の regularity はノイズ $\xi$ よりも高い**」ということである．例えば動的 $\phi_d^4$ 模型では $d = 4$，KPZ 方程式では $d = 2$ が臨界次元となる．特に，$d = 1$ の KPZ 方程式は繰り込み可能で，

$$(\partial_t - \partial_x^2)h = (\partial_x h)^2 - \infty + \xi \tag{1.4}$$

と与えられる．（この結果は [18] で既に得られている．）臨界次元以上では，正則性構造理論を適用することはできない．

Regularity に関する 2 つ目の条件について，詳細は定理 6.11 や定理 6.12 を確認せよ．ここでは，臨界次元未満であっても繰り込みできない SPDE の例を示す．$d = 1$ の KPZ 方程式において，ノイズの regularity を下げる演算子を付けた

$$(\partial_t - \partial_x^2)h = (\partial_x h)^2 + (-\partial_x^2)^{\frac{\alpha}{2}}\xi \qquad (\alpha \geq 0) \tag{1.5}$$

という SPDE を考える．$(-\partial_x^2)^{1/2}\xi$ の regularity は，$\alpha = \frac{1}{2}$ のときに $d = 2$ の時空ホワイトノイズと等しくなる．KPZ 方程式の臨界次元は $d = 2$ であるから，(1.5) は $\alpha < \frac{1}{2}$ で繰り込み可能と予想できる．しかし実際には，$\alpha < \frac{1}{4}$ でなければ (1.4) のような「無限大を引く」という形の繰り込みはできないことが分かっている [87].

## 1.5 関連する話題

- 正則性構造理論以外の繰り込みの方法
  - **Paracontrolled calculus**：[61, 28, 8]
  - **繰り込み群**の方法：[95, 42]
- 特定の SSPDE の研究
  - 動的 $\phi_d^4$ 模型：解のアプリオリ評価 [104, 105, 59, 103, 33, 93]，不変測度の構成 [4, 60, 17, 82, 5, 10]，Ising 模型との関係 [106, 55].
  - KPZ 方程式：時間大域的適切性 [68, 65, 116], **energy solution** の方法 [54, 64], 非線形項の一般化 [22].
  - 準線形方程式（$\Delta$ を $a(u)\Delta$ に）：[114, 49, 11, 52, 97, 113, 16, 15]
  - Anderson 模型：[70, 6, 96, 66, 107, 122, 102],
  - その他：確率 Navier-Stokes 方程式 [37, 125]，動的 sine-Gordon 模型 [80, 32]，動的 $\exp(\phi)_2$ 模型 [50, 3, 88, 89, 111, 110, 44]，確率 Yang-Mills 方程式 [29, 30], HJB 方程式 [124]
- 一般の SSPDE の研究
  - 解の性質：Freidlin-Wentzell 型大偏差原理 [84]，Wong-Zakai 型近似定理 [75]，中心極限定理 [81, 76]，強 Feller 性 [74]，Stroock-Varadhan 型台定理 [79]
  - 弱普遍性：KPZ 方程式 [77, 85]，動的 $\phi_d^4$ 模型 [119, 90, 46].
  - 定義域の拡張：Riemann 多様体 [39]，境界条件 [51, 53]，格子極限 [73, 45].
- 臨界次元，優臨界次元における繰り込み
  - $\phi_d^4$ 模型の自明性：$d \geq 5$ [1, 48], $d = 4$ [2].
  - KPZ 方程式：$d \geq 3$ [99, 35, 43, 36], $d = 2$ [34, 26, 56], $d \geq 2$ [25].
  - Navier-Stokes 方程式：[24, 91]
- 放物型以外：波動方程式 [62, 63, 109, 112]，Schrödinger 方程式 [40, 41].
- 実解析的側面の深化：再構成定理の証明 [27, 118, 19], Besov 型 modelled distribution [70, 71, 72]，Triebel-Lizorkin 型 modelled distribution [86]，正則性構造理論と paracontrolled calculus の関係 [101, 12, 13]

# 2 Rough path 理論の基礎

Gubinelli [57] による rough path 理論（**controlled path 理論**）を解説する．

## 2.1 確率微分方程式

$B:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ を連続関数，$f=(f_i^a)_{1\le i\le d,\,1\le a\le e}:\mathbb{R}^e\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)$ を十分滑らかな関数とし，積分方程式

$$X_t^a = x^a + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_i^a(X_s)dB_s^i \qquad (1\le a\le e,\ t\ge 0) \tag{2.1}$$

を考える．$B$ が Brown 運動のような確率過程のとき，(2.1) を**確率微分方程式**という．Brown 運動の標本軌道は「連続だが至るところ微分不可能」な関数だから，右辺の線積分を標準的な意味で定義できるとは限らない．実際，次の条件 (1)(2) を満たす可分 Banach 空間 $\mathcal{B}\subset C([0,1])$ は存在しない [47, Proposition 1.1]．

(1) 1 次元標準 Brown 運動の標本軌道は，確率 1 で $\mathcal{B}$ に含まれる．

(2) 連続双線形写像 $I:\mathcal{B}\times\mathcal{B}\to C([0,1])$ で，$B$ が $C^1$ 級であるとき

$$I(X,B)(t)=\int_0^t X_s\dot{B}_s ds$$

となるものが存在する．

## 2.2 Young 積分

微分不可能な関数に沿う線積分でも定義できる場合がある．

**定義 2.1.**
$\alpha\in(0,1]$ とする．

$$\|X\|_{C^\alpha} := |X_0| + \sup_{0\le s<t\le 1}\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$

を満たす連続関数 $X:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ 全体からなる Banach 空間を $C^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ と表す．

**定理 2.1 ([123]).**
$X\in C^\alpha([0,1];\mathbb{R})$, $B\in C^\beta([0,1];\mathbb{R})$ とする．$\alpha+\beta>1$ ならば，**Young 積分**

$$\int_s^t XdB := \lim_{\mathcal{P}\subset[s,t],\,|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N X_{t_{k-1}}(B_{t_k}-B_{t_{k-1}}) \qquad (0\le s<t\le 1)$$

が存在する．ここで，$\mathcal{P}$ は $[s,t]$ の分割 $\{s=t_0<t_1<\cdots<t_N=t\}$ 全体を動き，$|\mathcal{P}|=\max_{1\le k\le N}|t_k-t_{k-1}|$ は分割の幅を表す．

次の補題の証明は次回行う．

**補題 2.2 (Sewing lemma).**
$\gamma > 1$ とする．$\Xi$ は $\triangle := \{(t,s) \in [0,1]^2 \ ; \ t > s\}$ 上の実数値関数で，

$$\|\Xi\|_\gamma := \sup_{0 \le s < u < t \le 1} \frac{|\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us}|}{|t-s|^\gamma} < \infty$$

を満たすとする．このとき，任意の $(t,s) \in \triangle$ に対し

$$\int_s^t \Xi := \lim_{\mathcal{P} \subset [s,t],\, |\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^N \Xi_{t_k t_{k-1}}$$

が存在する．特に，$\int \Xi$ は次の性質を満たす．

(1) 区間の和に関して加法的である：$\displaystyle\int_s^t \Xi = \int_u^t \Xi + \int_s^u \Xi. \quad (s < u < t)$

(2) $\gamma$ のみに依存する定数 $C > 0$ で，次式を満たすものが存在する．

$$\left| \int_s^t \Xi - \Xi_{ts} \right| \le C \|\Xi\|_\gamma |t-s|^\gamma. \qquad ((t,s) \in \triangle)$$

**証明 (定理 2.1)** $\Xi_{ts} = X_s(B_t - B_s)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us} &= X_s(B_t - B_s) - X_u(B_t - B_u) - X_s(B_u - B_s) \\
&= X_s(B_t - B_u) - X_u(B_t - B_u) \\
&= (X_s - X_u)(B_t - B_u) = O(|t-s|^{\alpha+\beta})
\end{aligned}$$

となる．$\alpha + \beta > 1$ だから，補題 2.2 を適用できる． ■

$B$ を Brown 運動の標本軌道とすると，確率 1 で $B \in C^{\frac{1}{2}-}([0,1];\mathbb{R}^d) := \bigcap_{\alpha < \frac{1}{2}} C^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ となる．このとき，積分方程式 (2.1) の解 $X$ についても $X \in C^{\frac{1}{2}-}([0,1];\mathbb{R}^e)$ と考えるしかないから，Young 積分は適用できない．

## 2.3 Rough path

以下，$B, X$ の regularity は共通で

$$\alpha \in \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right]$$

であるとする．ここからは，すべての $X \in C^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ に対して線積分を定義することは諦め，**線積分を定義できるような $X$ がもつべき構造**に注目する．$\int f(X)dB$ が定義できていれば，$X$ の変動は

$$X_t^a - X_s^a = \int_s^t f_i^a(X_u) dB_u^i = f_i^a(X_s)(B_t^i - B_s^i) + O(|t-s|^{2\alpha}) \tag{2.2}$$

となるはずである．なお，Einstein の縮約により，上下に同じ添字（上式では $i$）があるときは，その添字に関する和の記号を省略する．

**定義 2.2.**
$B \in C^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ とする．連続関数 $\mathbb{X} = (X, X') : [0,1] \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^d$ で，

$$\|\mathbb{X}\|_{2\alpha} := \sup_{0\le s<t\le 1} \frac{|X_t - X_s - (X'_s)_i(B^i_t - B^i_s)|}{|t-s|^{2\alpha}} + \sup_{0\le s<t\le 1} \frac{|X'_t - X'_s|}{|t-s|^\alpha} < \infty$$

を満たすもの全体からなる Banach 空間を $\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1])$ と表す．$\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1])$ の元を，**$B$ によって制御されるパス (controlled path)** という．

**命題 2.3.**
$f \in C^3_b(\mathbb{R}^e)$ とする．任意の $\mathbb{X} = (\mathbb{X}^a)_{a=1}^e \in \mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1])^e =: \mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1];\mathbb{R}^e)$ に対し，

$$f(\mathbb{X}) := \big(f(X), \big(\partial_a f(X)(X^a)'_i\big)_{i=1}^d\big) \in \mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1])$$

である．また，写像 $\mathbb{X} \mapsto f(\mathbb{X})$ は局所 Lipschitz 連続である．

**問 2.**
命題 2.3 を示せ．

$\mathbb{Y} = (Y, Y')$ が $B$ によって制御されているとすると，$\int Y dB^i$ の変動は $t-s \ll 1$ のとき

$$\int_s^t Y_u dB^i_u \fallingdotseq Y_s(B^i_t - B^i_s) + (Y'_s)_j \int_s^t (B^j_u - B^j_s) dB^i_u$$

と近似できるはずである．右辺第 2 項の $B$ に関する反復積分は Young 積分としては定義できないが，未知関数を含んでいないため，与えられたものとして考えることができる．

**定義 2.3.**
連続関数 $\mathbb{B} = \big((B^i)_{i=1}^d, (B^{ij})_{i,j=1}^d\big) : \triangle \to \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^{d^2}$ で，

(1) **Chen の関係式**

$$B^i_{ts} = B^i_{tu} + B^i_{us}, \qquad B^{ij}_{ts} = B^{ij}_{tu} + B^{ij}_{us} + B^i_{tu}B^j_{us}, \qquad (s<u<t)$$

(2) Hölder 連続性

$$\|\mathbb{B}\|_\alpha := \sup_{0\le s<t\le 1} \max_{1\le i\le d} \frac{|B^i_{ts}|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{0\le s<t\le 1} \max_{1\le i,j\le d} \frac{|B^{ij}_{ts}|}{|t-s|^{2\alpha}} < \infty$$

を満たすもの全体からなる集合を $\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ と表す．$\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ の元を **$\alpha$-Hölder rough path** という．

**問 3.**
$B \in C^1([0,1];\mathbb{R}^d)$ のとき，

$$B^i_{ts} = B^i_t - B^i_s, \qquad B^{ij}_{ts} = \int_s^t (B^j_u - B^j_s)\dot{B}^i_u du$$

が 1-Hölder rough path であることを示せ．これを $B$ の**標準的な持ち上げ**という．

**注意 2.4.**
$\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ は線形空間ではないが，

$$d_\alpha(\mathbb{B},\mathbb{C}) := \sup_{0\le s<t\le 1}\max_{1\le i\le d}\frac{|B^i_{ts}-C^i_{ts}|}{|t-s|^\alpha} + \sup_{0\le s<t\le 1}\max_{1\le i,j\le d}\frac{|B^{ij}_{ts}-C^{ij}_{ts}|}{|t-s|^{2\alpha}}$$

によって完備距離空間となる．

**定理 2.4 ([47, Theorem 4.10]).**
$\mathbb{B}\in\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{Y}\in\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1])$（$B$ は $\mathbb{B}$ の $\mathbb{R}^d$ 成分）とする．$\alpha > \frac{1}{3}$ ならば，任意の $(t,s)\in\triangle$ に対し

$$\int_s^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}^i_u := \lim_{\mathcal{P}\subset[s,t],\,|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N \left(Y_{t_{k-1}}B^i_{t_k t_{k-1}} + (Y'_{t_{k-1}})_j B^{ij}_{t_k t_{k-1}}\right)$$

が存在し，さらに次式を満たす．

$$\left|\int_s^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}^i_u - Y_s B^i_{ts} - (Y'_s)_j B^{ij}_{ts}\right| \lesssim \|Y\|_{2\alpha}\|\mathbb{B}\|_\alpha |t-s|^{3\alpha}.$$

**証明** $\Xi_{ts} = Y_s B^i_{ts} + (Y'_s)_j B^{ij}_{ts}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us} &= Y_s B^i_{ts} - Y_u B^i_{tu} - Y_s B^i_{us} + (Y'_s)_j B^{ij}_{ts} - (Y'_u)_j B^{ij}_{tu} - (Y'_s)_j B^{ij}_{us} \\
&= Y_s B^i_{tu} - Y_u B^i_{tu} + (Y'_s)_j (B^{ij}_{tu} + B^i_{tu} B^j_{us}) - (Y'_u)_j B^{ij}_{tu} \\
&= -(Y_u - Y_s - (Y'_s)_j B^j_{us}) B^i_{tu} - ((Y'_s)_j - (Y'_u)_j) B^{ij}_{tu} = O(|t-s|^{3\alpha})
\end{aligned}$$

となる．$3\alpha > 1$ だから，補題 2.2 を適用できる． ■

## 2.4 Rough differential equation

以上の準備により，積分方程式 (2.1) は，写像の合成

$$\begin{aligned}
\mathbb{X}\in\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1];\mathbb{R}^e) &\mapsto f(\mathbb{X})\in\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1];\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e)) \\
&\mapsto \left(x + \int_0^\cdot f_i(\mathbb{X})d\mathbb{B}^i, f(X)\right)\in\mathcal{D}^{2\alpha}_B([0,1];\mathbb{R}^e)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

の下での不動点問題を解くことと翻訳される．

**定理 2.5 ([47, Theorem 8.3, Theorem 8.5]).**
$\alpha \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $f \in C_b^3(\mathbb{R}^e; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e))$ とする．任意の $x \in \mathbb{R}^e$ と $\mathbb{B} \in \Omega^\alpha([0,1]; \mathbb{R}^d)$ に対して，(2.3) の不動点 $\mathbb{X}$ がただ 1 つ存在する．また，解写像 $\mathbb{S} : (x, \mathbb{B}) \mapsto \mathbb{X}$ は局所 Lipschitz 連続である．

以上の結果を図式にまとめる．$S$ は古典的な解写像（$B$ が十分滑らかな場合），$\iota$ は標準的な持ち上げ，$\mathrm{pr}_1$ は第 1 成分への射影を表す．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[r, mapsto, "\mathbb{S}"] & \mathbb{X} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ B \arrow[u, dashed, mapsto, "\iota"] \arrow[r, dashed, mapsto, "S"] & X \end{tikzcd}$$

**Wong-Zakai 近似との関係**

$B$ を Brown 運動とし，$\{B^n\}_{n=1}^\infty$ をその 2 進折れ線近似とする．$B^n$ の標準的な持ち上げを $\mathbb{B}^n$ とすると，$|(B^n)_{ts}^{ij}| = O(|t-s|^2)$ であることから

$$\int_s^t f_i(\mathbb{X}_u) d(\mathbb{B}^n)_u^i = \lim_{\mathcal{P} \subset [s,t],\, |\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^N f_i(X_{t_{k-1}})(B^n)_{t_k t_{k-1}}^i = \int_s^t f_i(X_u) d(B^n)_u^i$$

のように，$\mathbb{B}$ に沿う積分は通常の Riemann-Stieltjes 積分と一致する．よって，上の図式における $X^n := (\mathrm{pr}_1 \circ \mathbb{S})(\mathbb{B}^n)$ は常微分方程式

$$X_t^n = x + \int_0^t f_i(X_s^n) d(B^n)_s^i \tag{2.4}$$

を満たす．$n \to \infty$ のとき，$\mathbb{B}^n$ の $\mathbb{R}^{d^2}$ 成分 $(B^n)_{ts}^{ij}$ は Stratonovich 型の確率積分に概収束することが確かめられ [47, Proposition 3.6], 従って (2.4) の解 $X^n$ も Stratonovich 型の確率積分方程式

$$X_t = x + \int_0^t f_i(X_s) \circ dB_s^i$$

の解に概収束する [47, Theorem 9.3].

次に，$\mathbb{B}^n$ を変形した別の rough path

$$\hat{\mathbb{B}}_{ts}^n := \left( (B^n)_{ts}^i, \int_s^t (B^n)_{us}^j (\dot{B}^n)_u^i du - \frac{1}{2}(t-s) \mathbf{1}_{i=j} \right)$$

を考える．$\hat{\mathbb{B}}^n$ の $\mathbb{R}^{d^2}$ 成分は伊藤型の確率積分に概収束するから，$\hat{X}^n := (\mathrm{pr}_1 \circ \mathbb{S})(\hat{\mathbb{B}}^n)$ は伊藤型の確率微分方程式

$$\hat{X}_t = x + \int_0^t f_i(\hat{X}_s) dB_s^i$$

の解に概収束する．

**問 4.**
積分の定義（定理 2.4）に戻って考えることで，$\hat{X}^n$ が

$$(\hat{X}^n)_t^a = x^a + \int_0^t f_i^a(\hat{X}_s^n) d(B^n)_s^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i=1}^d \sum_{b=1}^e (f_i^b \partial_b f_i^a)(\hat{X}_s^n) ds$$

を満たすことを示せ．これは後述する定理 7.1 や定理 7.2 の簡単な場合である．

第 2 回の内容

- Sewing lemma の証明
- Connes-Kreimer 代数
- Branched rough path 理論

### 2.5 Sewing lemma の証明

**証明 (補題 2.2)** $[s,t]$ の分割 $\mathcal{P}$ に対し，$\Xi(\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{N} \Xi_{t_k,t_{k-1}}$ とおく．まず，定数 $C > 0$ が存在して，任意の分割 $\mathcal{P}$ に対し

$$|\Xi_{ts} - \Xi(\mathcal{P})| \le C\|\Xi\|_\gamma |t-s|^\gamma \tag{2.5}$$

を満たすことを示す．$\sum_{k=1}^{N-1} |t_{k-1} - t_{k+1}| \le 2|t-s|$ だから，$|t_{k-1} - t_{k+1}| \le \frac{2}{N-1}|t-s|$ を満たす $k$ が少なくとも 1 つ存在する．このような $t_k$ を 1 つ選んで $\mathcal{P}$ から取り除くと

$$\begin{aligned}|\Xi(\mathcal{P}) - \Xi(\mathcal{P} \setminus \{t_k\})| &= |\Xi_{t_{k+1}t_k} + \Xi_{t_k t_{k-1}} - \Xi_{t_{k+1}t_{k-1}}| \le \|\Xi\|_\gamma |t_{k+1} - t_{k-1}|^\gamma \\ &\le \frac{2^\gamma}{(N-1)^\gamma} \|\Xi\|_\gamma |t-s|^\gamma\end{aligned}$$

となる．このように分点を 1 つずつ取り除いていく操作を，自明な分割 $\{s,t\}$ になるまで行うと

$$|\Xi(\mathcal{P}) - \Xi_{ts}| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^\gamma}{n^\gamma} \|\Xi\|_\gamma |t-s|^\gamma = 2^\gamma \zeta(\gamma) \|\Xi\|_\gamma |t-s|^\gamma$$

が得られる．よって，$C = 2^\gamma\zeta(\gamma)$ とおけば (2.5) が成り立つ．

次に，$\mathcal{P}'$ を $\mathcal{P}$ の細分とすると，$\mathcal{P}$ の分点ごとに (2.5) を用いることで

$$|\Xi(\mathcal{P}') - \Xi(\mathcal{P})| \le C\|\Xi\|_\gamma \sum_{k=1}^{N} |t_k - t_{k-1}|^\gamma \le C\|\Xi\|_\gamma |t-s| |\mathcal{P}|^{\gamma-1}$$

が得られる．$\gamma > 1$ より，$\{\Xi(\mathcal{P})\}$ は $|\mathcal{P}| \to 0$ のとき Cauchy 有向族であるから収束する．■

## 3 Branched rough path 理論

Gubinelli [58] の branched rough path 理論を解説する．

### 3.1 一般の $\alpha \in (0,1]$ への拡張

2 章の rough path 理論を $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$ まで拡張したい．まず $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ として，(2.2) の展開を 1 次の項まで続けてみる．

$$\begin{aligned}X_t^a - X_s^a &= \int_s^t f_i^a(X_u) dB_u^i = \int_s^t \big(f_i^a(X_s) + \partial_b f_i^a(X_s)(X_u^b - X_s^b) + O(|u-s|^{2\alpha})\big) dB_u^i \\ &= f_i^a(X_s) \int_s^t dB_u^i + (\partial_b f_i^a \cdot f_j^b)(X_s) \int_s^t \left( \int_s^u dB_v^j \right) dB_u^i + O(|t-s|^{3\alpha}).\end{aligned}$$

このとき，$f_i^a(X)$ の変動は

$$\begin{aligned}
&f_i^a(X_t) - f_i^a(X_s) \\
&= \partial_b f_i^a(X_s)(X_t^b - X_s^b) + \frac{1}{2}\partial_b\partial_c f_i^a(X_s)(X_t^b - X_s^b)(X_t^c - X_s^c) + O(|t-s|^{3\alpha}) \\
&= (\partial_b f_i^a \cdot f_j^b)(X_s)\int_s^t dB_u^j + (\partial_b f_i^a \cdot \partial_c f_j^b \cdot f_k^c)(X_s)\int_s^t\Big(\int_s^u dB_v^k\Big)dB_u^j \\
&\quad + \frac{1}{2}(\partial_b\partial_c f_i^a \cdot f_j^b \cdot f_k^c)(X_s)\Big(\int_s^t dB_u^j\Big)\Big(\int_s^t dB_v^k\Big) + O(|t-s|^{3\alpha})
\end{aligned}$$

となるから，$\int f(X)dB$ の変動は

$$\begin{aligned}
\int_s^t f_i^a(X_u)dB_u^i \fallingdotseq \sigma_i^a(X_s)&\underline{\int_s^t dB_u^i} + (\partial_b f_i^a \cdot f_j^b)(X_s)\underline{\int_s^t\Big(\int_s^u dB_v^j\Big)dB_u^i} \\
&+ (\partial_b f_i^a \cdot \partial_c f_j^b \cdot f_k^c)(X_s)\underline{\int_s^t\Big(\int_s^u\Big(\int_s^v dB_w^k\Big)dB_v^j\Big)dB_u^i} \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_b\partial_c f_i^a \cdot f_j^b \cdot f_k^c)(X_s)\underline{\int_s^t\Big(\int_s^u dB_v^j\Big)\Big(\int_s^u dB_w^k\Big)dB_u^i}
\end{aligned}$$

であると期待できる．実際，下線部の反復積分を rough path の要素とし，controlled path の定義を適切に修正すれば，$\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ まで rough path 理論を拡張することができる．しかし，このままではあまりにも計算が複雑になってしまう．

**注意 3.1.**
部分積分公式が成り立つ場合は，$\int dB^i \int dB^j = \iint dB^i dB^j + \iint dB^j dB^i$ のように積を反復積分の和に分解できるので，結局は $\iint \cdots \int dB^i \cdots dB^j dB^k$ のような「枝分かれのない」反復積分のみ考えれば十分である．このような反復積分のみを備えた rough path を **geometric rough path** という．部分積分公式は Stratonovich 型の確率積分では成り立つが，伊藤型の確率積分では 2 次変分の項が発生し，そのままの形では成り立たない．

### 3.2 Connes-Kreimer 代数

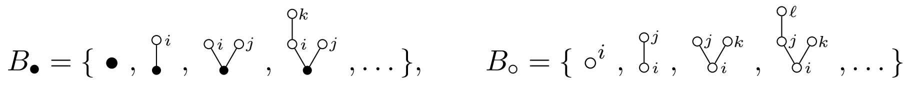
反復積分の構造をグラフを用いて表すと便利である．

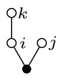
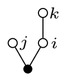
**定義 3.2.**
連結でループをもたない非平面的グラフ $\tau$ で，**root** と呼ばれる頂点 $\rho_\tau$ をただ 1 つもつものを **rooted tree** という．Rooted tree $\tau$ と，**type** と呼ばれる写像 $\mathfrak{t} : N_\tau \to \{0, 1, \dots, d\}$ の組 $(\tau, \mathfrak{t})$ を **(rooted) typed tree** という．Typed tree $(\tau, \mathfrak{t})$ に対し，$\|(\tau, \mathfrak{t})\| := |\mathfrak{t}^{-1}(\{1, \dots, d\})|$ と表す．なお，しばしば $\mathfrak{t}$ を省略し，typed tree を $\tau, \sigma, \eta$ などと 1 文字で表すこともある．

以下，typed tree の集合

$$\begin{aligned}
B_\bullet &:= \big\{(\tau, \mathfrak{t})\ ;\ \mathfrak{t}(\rho_\tau) = 0,\ \mathfrak{t}(N_\tau \setminus \{\rho_\tau\}) \subset \{1, \dots, d\}\big\}, \\
B_\circ &:= \big\{(\tau, \mathfrak{t})\ ;\ \mathfrak{t}(N_\tau) \subset \{1, \dots, d\}\big\}
\end{aligned}$$

を用いる．元を具体的に例示すると次のようになる．Root は常に一番下に置くこととし，$\mathfrak{t}(v)=0$ である頂点 $v$ を $\bullet$ と，$\mathfrak{t}(v)=i\geq 1$ である頂点 $v$ を $\circ^i$ と表す．



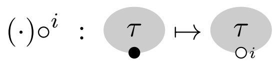
なお，これらのグラフは非平面的であるから，例えば  と  は同一視する．

$\bullet$ 型の頂点は $1$ を，$\circ^i$ 型の頂点は $\dot{B}^i$ を，上から下に向かう辺は積分演算子を，1 つの頂点に向かう複数の辺は積を表す．つまり，反復積分との対応関係は次のようになる．

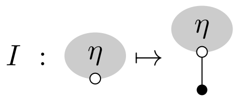
$$\begin{aligned}
&\mathbb{B}_{ts}[\bullet]=1, && \mathbb{B}_{ts}[\tau\circ^i]=\mathbb{B}_{ts}[\tau]\dot{B}^i_t \quad (\tau\in B_\bullet),\\
&\mathbb{B}_{ts}[I\eta]=\int_s^t \mathbb{B}_{us}[\eta]du \quad (\eta\in B_\circ), && \mathbb{B}_{ts}[\tau\sigma]=(\mathbb{B}_{ts}[\tau])(\mathbb{B}_{ts}[\sigma]) \quad (\tau,\sigma\in B_\bullet)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ここで，typed tree に対する演算を次のように定義する．

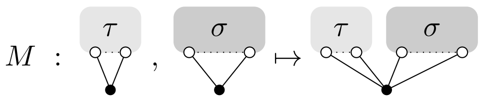
**定義 3.3.**
$\tau\in B_\bullet$ の root の type を $i$ に変えた typed tree を $\tau\circ^i$ と表す．



$\eta\in B_\circ$ の root から下に向かう辺を 1 本付け足した typed tree を $I\eta$ と表す．$I\eta$ の root の type は $0$ とする．



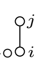
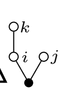
$\tau,\sigma\in B_\bullet$ を root で繋げた typed tree（**tree product** という）を $M(\tau,\sigma)$ または $\tau\sigma$ と表す．



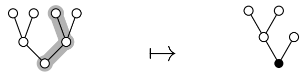
**定義 3.4.**
$H:=\langle B_\bullet\rangle$, $W:=\langle B_\circ\rangle$ とする．線形写像 $\Delta: H\to H\otimes H$ と $\Delta_\circ: W\to W\otimes H$ を，以下のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}
&\Delta\bullet=\bullet\otimes\bullet, && \Delta_\circ(\tau\circ^i)=(\Delta\tau)(\circ^i\otimes\bullet), \quad (\tau\in B_\bullet)\\
&\Delta I\eta=(I\otimes\mathrm{Id})\Delta_\circ\eta+\bullet\otimes I\eta, \quad (\eta\in B_\circ) && \Delta(\tau\sigma)=(\Delta\tau)(\Delta\sigma). \quad (\tau,\sigma\in B_\bullet)
\end{aligned}$$

なお，テンソル積同士の積は $(\tau_1\otimes\tau_2)(\sigma_1\otimes\sigma_2)=(\tau_1\sigma_1)\otimes(\tau_2\sigma_2)$, 写像のテンソル積は $(f_1\otimes f_2)(\tau_1\otimes\tau_2)=f_1(\tau_1)\otimes f_2(\tau_2)$ と定義する．

**問 5.**
以下を展開せよ：$\Delta_\circ$, $\Delta$.

なお，より直接的な定義も可能である．Rooted tree $\tau$ に対し，$\tau$ の連結部分グラフで，$\tau$ の root を含むもの全体からなる集合を $A(\tau)$ と表す．$\sigma \in A(\tau)$ に対して，$\tau$ の中で $\sigma$ を 1 点に潰したグラフを $\tau/\sigma$ と表す．$\sigma$ を潰した点の type は 0 とする．例えば下図左のグラフを $\tau$ とし，灰色で囲まれた部分グラフを $\sigma$ とすると，$\tau/\sigma$ は下図右のようなグラフになる．



このとき，任意の $(\tau, \mathfrak{t}) \in B_\circ$ (resp. $B_\bullet$) に対し次式が成り立つ．

$$\Delta_\circ(\tau, \mathfrak{t}) \ (\text{resp.}\, \Delta(\tau, \mathfrak{t})) \ = \sum_{\sigma \in A(\tau)} (\sigma, \mathfrak{t}|_{N_\sigma}) \otimes (\tau/\sigma, \mathfrak{t} \cdot \mathbf{1}_{N_\tau \setminus N_\sigma}). \tag{3.2}$$

Hopf 代数に関する用語を手短かに定義する．詳細は [121, 100, 117] などを参照せよ．

**定義 3.5.**

(1) 線形空間 $A$ に，線形写像 $M : A \otimes A \to A$, $\eta : \mathbb{R} \to A$ が与えられていて

$$M(M \otimes \mathrm{Id}_A) = M(\mathrm{Id}_A \otimes M) \quad \textbf{（結合則）}, \quad M(\eta \otimes \mathrm{Id}_A) = M(\mathrm{Id}_A \otimes \eta) = \mathrm{Id}_A$$

を満たすとき，$(A, M, \eta)$ を**代数 (algebra)** という．第 2 式では，$\mathbb{R} \otimes A$, $A \otimes \mathbb{R}$, $A$ を同一視している．$M$ を**積**，$\eta$ を**単位射**といい，$\mathbf{1} = \eta(1)$ を**単位元**という．

(2) 線形空間 $C$ に，線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \mathbb{R}$ が与えられていて

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}_C)\Delta = (\mathrm{Id}_C \otimes \Delta)\Delta \quad \textbf{（余結合則）}, \quad (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_C)\Delta = (\mathrm{Id}_C \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{Id}_C$$

を満たすとき，$(C, \Delta, \varepsilon)$ を**余代数 (coalgebra)** という．$\Delta$ を**余積 (coproduct)**，$\varepsilon$ を**余単位射 (counit)** という．

(3) $(B, M, \eta)$ は代数であり，$(B, \Delta, \varepsilon)$ は余代数であるとする．$\Delta$ と $\varepsilon$ が代数準同型である，すなわち

$$\Delta\mathbf{1} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \qquad \Delta(\tau\sigma) = (\Delta\tau)(\Delta\sigma),$$
$$\varepsilon(\mathbf{1}) = 1, \qquad \varepsilon(\tau\sigma) = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)$$

満たすとき，$(B, M, \eta, \Delta, \varepsilon)$ を**双代数 (bialgebra)** という．

(4) $(A, M, \eta)$ を代数，$(C, \Delta, \varepsilon)$ を余代数とする．線形写像 $f, g : C \to A$ に対し，

$$f * g := M(f \otimes g)\Delta : C \to A$$

とおくと，$(\mathcal{L}(C, A), *, \eta \circ \varepsilon)$ は代数となる．$*$ を**合成積 (convolution product)** という．

(5) $(H, M, \eta, \Delta, \varepsilon)$ を双代数とする．$\mathrm{Id}_H$ が $*$ についての逆元をもつ，すなわち

$$M(S \otimes \mathrm{Id}_H)\Delta = M(\mathrm{Id}_H \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$$

を満たす線形写像 $S : H \to H$ が存在するとき，$(H, M, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ を **Hopf 代数**といい，$S$ を**対合射 (antipode)** という．

(6) $(H, M, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ を Hopf 代数とする．$H$ から $\mathbb{R}$ への代数準同型全体からなる集合を $G$ とおくと，$(G, *, \varepsilon)$ は群となる．これを**指標群 (character group)** という．

**問 6.**
(4)(6) の主張を示せ.

**例 3.1.**
記号 $\{\bullet^k\}_{k\in\mathbb{N}^d}$ によって生成される線形空間を $X$ と表す．ただし，$\bullet^0$ は $\bullet$ と表す．$X$ の積と余積を

$$\bullet^k \cdot \bullet^\ell = \bullet^{k+\ell}, \qquad \Delta \bullet^k = \sum_{\ell,m\in\mathbb{N}^d\,;\,k=\ell+m} \frac{k!}{\ell!m!} \bullet^\ell \otimes \bullet^m$$

によって定義すると，$(X,\cdot,\bullet,\Delta,\bullet^*)$ は双代数となる．ただし，$\bullet^*$ は $\bullet^*(\bullet^k)=\mathbf{1}_{k=0}$ によって定義される双対ベクトルである．例えば,

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta\bullet^k &= \sum_{\ell,m\,;\,k=\ell+m}\frac{k!}{\ell!m!}\Delta\bullet^\ell\otimes\bullet^m\\ &= \sum_{p,q,m\,;\,k=p+q+m}\frac{k!}{p!q!m!}\bullet^p\otimes\bullet^q\otimes\bullet^m\end{aligned}$$

と展開すると，対称性から $(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta\bullet^k=(\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta\bullet^k$ が分かる．また，対合射を

$$S(\bullet^k) = (-1)^{|k|}\bullet^k$$

と定義すれば，$(X,\cdot,\bullet,\Delta,\bullet^*,S)$ は Hopf 代数となる.

**問 7.**
Hopf 代数となるための残りの性質を証明せよ.

**定理 3.1.**
$H$ は，tree product の線形拡張 $M: H\otimes H\to H$ と $\Delta$ によって Hopf 代数の構造をもつ．単位元は $\bullet$ であり，余単位射は $\bullet^*(\tau)=\mathbf{1}_{\tau=\bullet}$ $(\tau\in B_\bullet)$ によって定義される双対ベクトル $\bullet^*$ である．また，$W$ は $H$ 上の**右余加群**の構造をもつ．すなわち次式が成り立つ.

$$(\Delta_\circ\otimes\mathrm{Id})\Delta_\circ = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta_\circ.$$

**定義 3.6.**
$H$ を **Connes-Kreimer 代数**，その指標群 $G$ を **Butcher 群**という.

**証明 (定理 3.1)** 余結合則と，対合射の存在のみ示す.

**余結合則**：$\|\tau\|$ に関する帰納法で示す．$\Delta$ は代数準同型だから,

$$(\Delta_\circ\otimes\mathrm{Id})\Delta_\circ\tau = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta_\circ\tau \quad\Rightarrow\quad (\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta I\tau = (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta I\tau$$

のみ示せばよい．**Sweedler の記法** $\Delta_\circ\tau=\sum\tau^{(1)}\otimes\tau^{(2)}$ を用いると

$$(\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta I\tau = (\Delta\otimes\mathrm{Id})\big((I\otimes\mathrm{Id})\Delta_\circ\tau + \bullet\otimes I\tau\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum \Delta I\tau^{(1)} \otimes \tau^{(2)} + \bullet \otimes \bullet \otimes I\tau \\
&= \sum \big((I \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ \tau^{(1)} + \bullet \otimes I\tau^{(1)}\big) \otimes \tau^{(2)} + \bullet \otimes \bullet \otimes I\tau \\
&= (I \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})(\Delta_\circ \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ \tau + \bullet \otimes (I \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ \tau + \bullet \otimes \bullet \otimes I\tau \\
&= (I \otimes \mathrm{Id} \otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta_\circ \tau + \bullet \otimes \Delta I\tau \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\big((I \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ \tau + \bullet \otimes I\tau\big) = (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta I\tau
\end{aligned}
$$

となる．

**対合射の存在**：再び Sweedler の記法 $\Delta_\circ \tau = \sum \tau^{(1)} \otimes \tau^{(2)}$ を用いて，$M(\mathrm{Id} \otimes S)\Delta I\tau = 0$ を展開すると

$$SI\tau = -\sum I\tau^{(1)} S\tau^{(2)}$$

となる．(3.2) の展開より常に $\|\tau^{(2)}\| < \|\tau\| = \|I\tau\|$ であるから，この式と

$$S(\bullet) = \bullet \otimes \bullet, \qquad S(\tau\sigma) = (S\tau)(S\sigma)$$

を仮定すれば（一般に対合射は代数反準同型である [100, Proposition I.7.1]），線形写像 $S$ が帰納的に定義される．この $S$ が

$$M(S \otimes \mathrm{Id})\Delta\tau = \bullet^*(\tau)\,\bullet \qquad (\tau \in B_\bullet)$$

を満たしていることを示せばよい．$\|\tau\| < n$ のときは正しいと仮定して，$\|\tau\| = n$ の場合を示す．代数準同型性より，$\tau = I\eta$ の形の rooted tree を考えればよい．このとき

$$
\begin{aligned}
M(S \otimes \mathrm{Id})\Delta I\eta &= \sum (SI\eta^{(1)})\eta^{(2)} + I\eta \\
&= -\sum \big(M(I \otimes S)\Delta_\circ \eta^{(1)}\big)\eta^{(2)} + I\eta \\
&= -M(M \otimes \mathrm{Id})(I \otimes S \otimes \mathrm{Id})(\Delta_\circ \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ \eta + I\eta \\
&= -M(\mathrm{Id} \otimes M)(I \otimes S \otimes \mathrm{Id})(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta_\circ \eta + I\eta \\
&= -M\big(I \otimes M(S \otimes \mathrm{Id})\Delta\big)\Delta_\circ \eta + I\eta \\
&= -(I \otimes \bullet^*)\Delta_\circ \eta + I\eta = 0
\end{aligned}
$$

となる．最後から 2 つ目の等式では，(3.2) の展開と帰納法の仮定を用いた． ■

### 3.3 Branched rough path

**定義 3.7.**
$\alpha \in (0,1]$ とする．連続関数 $\mathbb{B} : \triangle \to G$ で，

(1) Chen の関係式

$$\mathbb{B}_{ts} = \mathbb{B}_{tu} * \mathbb{B}_{us}, \qquad (s < u < t)$$

(2) Hölder 連続性

$$\|\mathbb{B}\|_\beta := \sup_{\tau \in B_\bullet\,;\,\alpha\|\tau\| < \beta} \ \sup_{0 \le s < t \le 1} \frac{|\mathbb{B}_{ts}[\tau]|}{|t-s|^{\alpha\|\tau\|}} < \infty \qquad (\forall \beta > 0)$$

を満たすもの全体からなる集合を $\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ と表す．$\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ の元を **$\alpha$-Hölder branched rough path** という．

$\Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ は線形空間ではないが，注意 2.4 と同様に完備距離空間となる．

**命題 3.2.**
$B \in C^1([0,1];\mathbb{R}^d)$ に対し，(3.1) によって $\mathbb{B} : \triangle \to G$ を定義する．このとき $\mathbb{B}$ は 1-Hölder branched rough path である．これを $B$ の**標準的な持ち上げ**という．

**証明** Chen の関係式のみ示す．(3.2) の展開から，$\|\tau\|$ に関する帰納法により

$$\begin{aligned}(\mathbb{B}_{tu} \otimes \mathbb{B}_{us})\Delta I(\tau\circ^i) &= \sum \mathbb{B}_{tu}[I(\tau^{(1)}\circ^i)]\mathbb{B}_{us}[\tau^{(2)}] + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] \\ &= \sum \left(\int_u^t \mathbb{B}_{vu}[\tau^{(1)}]\dot{B}_v^i dv\right)\mathbb{B}_{us}[\tau^{(2)}] + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] \\ &= \int_u^t \{(\mathbb{B}_{vu} \otimes \mathbb{B}_{us})\Delta\tau\}\dot{B}_v^i dv + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] \\ &= \int_u^t \mathbb{B}_{vs}[\tau]\dot{B}_v^i dv + \int_s^u \mathbb{B}_{vs}[\tau]\dot{B}_v^i dv = \int_s^t \mathbb{B}_{vs}[\tau]\dot{B}_v^i dv = \mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)]\end{aligned}$$

などを得る． ■

### 3.4 Controlled path

各 $g \in G$ に対して，$H$ 上の線形写像 $\Gamma_g$ を

$$\Gamma_g\tau := (\mathrm{Id} \otimes g)\Delta\tau \tag{3.3}$$

と定義する．ただし，$H \otimes \mathbb{R}$ を $H$ と同一視している．

**問 8.**
$g_1, g_2 \in G$ に対し，$\Gamma_{g_1}\Gamma_{g_2} = \Gamma_{g_1 * g_2}$ であることを示せ．従って，$\Gamma$ は $G$ の $H$ への左からの群作用を定める．

各 $\gamma > 0$ に対し，$H_{<\gamma} := \langle \tau \in B_\bullet \,;\, \alpha\|\tau\| < \gamma \rangle$ は $G$ の作用に関して不変な（任意の $g \in G$ に対して $\Gamma_g H_{<\gamma} \subset H_{<\gamma}$ を満たす）部分空間である．

**定義 3.8.**
$\mathbb{B} \in \Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$, $\gamma > 0$ とする．連続関数 $\mathbb{Y} : [0,1] \to H_{<\gamma}$ で,

$$\|\mathbb{Y}\|_\gamma := \sup_{\tau \in B_\bullet\,;\,\alpha\|\tau\|<\gamma} \sup_{0\le s<t\le 1} \frac{|\pi_\tau(\mathbb{Y}_t - \Gamma_{\mathbb{B}_{ts}}\mathbb{Y}_s)|}{|t-s|^{\gamma-\alpha\|\tau\|}} < \infty$$

を満たすもの全体からなる Banach 空間を $\mathcal{D}_{\mathbb{B}}^\gamma([0,1])$ と表す．ただし，$\pi_\tau : H \to \mathbb{R}$ は $\tau$ 成分への標準的な射影を表す．$\mathcal{D}_{\mathbb{B}}^\gamma([0,1])$ の元を **$\gamma$-controlled path** という．

**例 3.2.**
$\gamma = 2\alpha$ とする．$\mathbb{Y}_t = Y_t \bullet + (Y'_t)_i \overset{\circ^{i}}{\bullet}$ とおくと

$$\mathbb{Y}_t - \Gamma_{\mathbb{B}_{ts}} \mathbb{Y}_s = (Y_t - Y_s - (Y'_s)_i \mathbb{B}_{ts}[\overset{\circ^{i}}{\bullet}]) \bullet + (Y'_t - Y'_s)_i \overset{\circ^{i}}{\bullet}$$

となるから，$\mathbb{Y} \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{\mathbb{B}}([0,1])$ であることは $(Y, Y') \in \mathcal{D}^{2\alpha}_{B}([0,1])$ であること（定義 2.2）と一致する．

**定理 3.3 ([58, Theorem 8.5]).**
$\mathbb{B} \in \Omega^\alpha([0,1]; \mathbb{R}^d)$, $\mathbb{Y} \in \mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1])$ とする．$\gamma + \alpha > 1$ ならば，任意の $(t,s) \in \triangle$ に対し

$$\int_s^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}^i_u := \lim_{\mathcal{P} \subset [s,t],\, |\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^N \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\mathbb{Y}_{t_{k-1}} \circ^i)]$$

が存在し，さらに次式を満たす．

$$\left| \int_s^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}^i_u - \mathbb{B}_{ts}[I(\mathbb{Y}_s \circ^i)] \right| \lesssim \|\mathbb{B}\|_{\gamma+\alpha} \|\mathbb{Y}\|_\gamma |t-s|^{\gamma+\alpha}. \tag{3.4}$$

**証明** $\Xi_{ts} = \mathbb{B}_{ts}[I(\mathbb{Y}_s \circ^i)]$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us} = (\mathbb{B}_{tu} \otimes \mathbb{B}_{us}) \Delta I(\mathbb{Y}_s \circ^i) - \mathbb{B}_{tu}[I(\mathbb{Y}_u \circ^i)] - \mathbb{B}_{us}[I(\mathbb{Y}_s \circ^i)] \\
&= (\mathbb{B}_{tu} \otimes \mathbb{B}_{us}) \big[ (I \otimes \mathrm{Id}) \Delta_\circ (\mathbb{Y}_s \circ^i) + \bullet \otimes I(\mathbb{Y}_s \circ^i) \big] - \mathbb{B}_{tu}[I(\mathbb{Y}_u \circ^i)] - \mathbb{B}_{us}[I(\mathbb{Y}_s \circ^i)] \\
&= \mathbb{B}_{tu} \big[ I \big( (\Gamma_{\mathbb{B}_{us}} \mathbb{Y}_s - \mathbb{Y}_u) \circ^i \big) \big]
\end{aligned}$$

となるから，

$$|\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us}| \le \sum_{\alpha \|\tau\| < \gamma} |\mathbb{B}_{tu}[I(\tau \circ^i)]| |\pi_\tau (\Gamma_{\mathbb{B}_{us}} \mathbb{Y}_s - \mathbb{Y}_u)| \lesssim \|\mathbb{B}\|_{\gamma+\alpha} \|\mathbb{Y}\|_\gamma |t-s|^{\gamma+\alpha}$$

を得る．$\gamma + \alpha > 1$ だから，補題 2.2 を適用できる． ■

### 3.5 Rough differential equation

$H$ の部分空間 $P := \langle \bullet \rangle \oplus \langle I\eta \,;\, \eta \in B_\circ \rangle$ は $G$ の作用に関して不変である．$P$ に値をとる $\gamma$-controlled path 全体からなる空間を $\mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1]; P)$ と表す．また，$\mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1]; P)^e$ を $\mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1]; \mathbb{R}^e \otimes P)$ と表す．

**命題 3.4 ([58, Lemma 8.4], [69, Theorem 4.16]).**
$f \in C^{N+1}_b(\mathbb{R}^e)$ $(N \ge \frac{\gamma}{\alpha} \vee 1)$ とする．任意の $\mathbb{X} = (\mathbb{X}^a)^e_{a=1} \in \mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1]; \mathbb{R}^e \otimes P)$ に対し，

$$f(\mathbb{X}) := \pi_{<\gamma} \left( \sum_{k \in \mathbb{N}^e} \frac{1}{k!} \partial^k f(X) \prod_{a=1}^e (\mathbb{X}^a - X^a \bullet)^{k_a} \right) \in \mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1])$$

である．ただし，$X^a$ は $\mathbb{X}^a$ の $\bullet$ 成分を表し，$\pi_{<\gamma} : H \to H_{<\gamma}$ は標準的な射影を表す．また，写像 $\mathbb{X} \mapsto f(\mathbb{X})$ は局所 Lipschitz 連続である．

2.4 章と同様に，積分方程式 (2.1) は，写像の合成

$$\begin{aligned}\mathbb{X} \in \mathcal{D}^{n\alpha}([0,1];\mathbb{R}^e \otimes P) &\mapsto f(\mathbb{X}) \in \mathcal{D}^{n\alpha}([0,1];\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e) \otimes H) \\ &\mapsto \left(x + \int_0^{\cdot} f_i(\mathbb{X}) d\mathbb{B}^i\right)\bullet + \pi_{<n\alpha} I\big(f_i(\mathbb{X}) \circ^i\big) \in \mathcal{D}^{n\alpha}([0,1];\mathbb{R}^e \otimes P)\end{aligned} \tag{3.5}$$

の下での不動点問題を解くことと翻訳される．ただし，$n \in \mathbb{N}_+$ は $\frac{1}{n+1} < \alpha \le \frac{1}{n}$ を満たすものとする．

**問 9.**
任意の $g \in G$, $\tau \in B_\bullet$, $i \in \{1,\dots,d\}$ に対し，

$$\Gamma_g I(\tau\circ^i) = I\big((\Gamma_g\tau)\circ^i\big) + g\big(I(\tau\circ^i)\big)\bullet$$

が成り立つことを示せ．また，この式を用いて，

$$\mathbb{Y} \in \mathcal{D}^\gamma_{\mathbb{B}}([0,1]),\ \gamma > -\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(\int_0^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}^i_u\right)\bullet + I(\mathbb{Y}_t\circ^i) \in \mathcal{D}^{\gamma+\alpha}_{\mathbb{B}}([0,1];P)$$

を示せ．

**定理 3.5 ([58, Theorem 8.8]).**
$n \in \mathbb{N}_+$, $\alpha \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $f \in C_b^{n+1}(\mathbb{R}^e;\mathcal{L}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^e))$ とする．任意の $x \in \mathbb{R}^e$ と $\mathbb{B} \in \Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ に対して，(3.5) の不動点 $\mathbb{X}$ がただ 1 つ存在する．また，解写像 $(x,\mathbb{B}) \mapsto \mathbb{X}$ は局所 Lipschitz 連続である．

## 3.6 拡張定理

Branched rough path は無限次元空間に値をとっているように見えるが，実際には有限個の $\tau$ に対する値のみによって決定されている（cf. Lyons の拡張定理 [98, Theorem 2.2.1]）．

**定理 3.6 ([58, Theorem 7.3]).**
$B_\bullet^{\le 1} := \{\tau \in B_\bullet\,;\,\alpha\|\tau\| \le 1\}$ とおく．連続関数の族 $\{\mathbb{B}[\tau] : \triangle \to \mathbb{R}\}_{\tau \in B_\bullet^{\le 1}}$ で，部分的な準同型性

$$\mathbb{B}_{ts}[\bullet] = 1, \qquad \mathbb{B}_{ts}[\tau\sigma] = (\mathbb{B}_{ts}[\tau])(\mathbb{B}_{ts}[\sigma]) \quad (\tau\sigma \in B_\bullet^{\le 1})$$

と，定義 3.7 の条件 (1)(2) をすべての $\tau \in B_\bullet^{\le 1}$ に対して満たすもの全体からなる集合を $\Omega^\alpha_{\le 1}([0,1];\mathbb{R}^d)$ と表す．このとき，連続拡張写像 $\Omega^\alpha_{\le 1}([0,1];\mathbb{R}^d) \to \Omega^\alpha([0,1];\mathbb{R}^d)$ が一意的に存在する．

**証明** $\alpha\|I(\tau\circ^i)\| > 1$ であるとき，$\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)]$ が一意的に決定されることを示せばよい．余積の定義より，$s < u < t$ に対し

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)] &= (\mathbb{B}_{tu} \otimes \mathbb{B}_{us})\Delta I(\tau\circ^i) = (\mathbb{B}_{tu} \otimes \mathbb{B}_{us})(I \otimes \mathrm{Id})\Delta_\circ(\tau\circ^i) + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] \\ &= \mathbb{B}_{tu}\big[I\big((\Gamma_{\mathbb{B}_{us}}\tau)\circ^i\big)\big] + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] \\ &= \mathbb{B}_{tu}[I(\tau\circ^i)] + \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] + \mathbb{B}_{tu}\big[I\big((\Gamma_{\mathbb{B}_{us}}\tau - \tau)\circ^i\big)\big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．以下，

$$\mathbb{X}^\tau_{ts} := \Gamma_{\mathbb{B}_{ts}}\tau - \tau = \sum_{\sigma\in A(\tau),\,\sigma\neq\tau} \mathbb{B}_{ts}(\tau/\sigma)\sigma$$

とおく．$\|\cdot\|$ に関する帰納法により，$X^\tau_{ts}$ の係数や $\mathbb{B}_{tu}[I(\mathbb{X}_{us}\circ^i)]$ の値はすでに決定されていると仮定してよい．ここで，固定した $s$ に対し

$$\begin{aligned}\pi_\sigma(\mathbb{X}^\tau_{ts} - \Gamma_{\mathbb{B}_{tu}}\mathbb{X}^\tau_{us}) &= \pi_\sigma\big((\Gamma_{\mathbb{B}_{ts}}\tau - \tau) - \Gamma_{\mathbb{B}_{tu}}(\Gamma_{\mathbb{B}_{us}}\tau - \tau)\big) = \pi_\sigma(\Gamma_{\mathbb{B}_{tu}}\tau - \tau)\\ &= \mathbb{B}_{tu}[\tau/\sigma] = O(|t-u|^{\alpha\|\tau\|-\alpha\|\sigma\|})\end{aligned}$$

より，$\mathbb{X}^\tau_{(\cdot)s} \in \mathcal{D}^{\alpha\|\tau\|}_{\mathbb{B}}([s,1])$ であることに注意する．$[s,t]$ の分割 $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = t\}$ をとり，各 $k$ に対して等式 (3.6) を用いると

$$\mathbb{B}_{t_k s}[I(\tau\circ^i)] - \mathbb{B}_{t_{k-1}s}[I(\tau\circ^i)] = \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\tau\circ^i)] + \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\mathbb{X}^\tau_{t_{k-1}s}\circ^i)]$$

となるから，Hölder 条件を満たす $\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)]$ が存在するならば，

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)] &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N \big(\mathbb{B}_{t_k s}[I(\tau\circ^i)] - \mathbb{B}_{t_{k-1}s}[I(\tau\circ^i)]\big)\\ &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N \big(O(|t_k - t_{k-1}|^{1+}) + \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\mathbb{X}^\tau_{t_{k-1}s}\circ^i)]\big)\\ &= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\mathbb{X}^\tau_{t_{k-1}s}\circ^i)] = \int_s^t \mathbb{X}^\tau_{us}\,d\mathbb{B}^i_u\end{aligned}$$

となるはずである．$\mathbb{X}^\tau_{(\cdot)s} \in \mathcal{D}^{\alpha\|\tau\|}_{\mathbb{B}}([s,1])$ であるから，最後の積分は確かに存在する．よって一意性は示された．

このように定義した $\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)]$ が，定義 3.7 の条件 (1)(2) を満たすことを示す．(3.4) より

$$|\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)]| = \left|\int_s^t \mathbb{X}^\tau_{us}\,d\mathbb{B}^i_u - \mathbb{B}_{ts}[I(\mathbb{X}^\tau_{ss}\circ^i)]\right| = O(|t-s|^{\alpha(\|\tau\|+1)})$$

となるから，Hölder 条件は成り立つ．また，$s < u < t$ に対し

$$\mathbb{B}_{ts}[I(\tau\circ^i)] - \mathbb{B}_{tu}[I(\tau\circ^i)] - \mathbb{B}_{us}[I(\tau\circ^i)] = \int_u^t (\mathbb{X}^\tau_{vs} - \mathbb{X}^\tau_{vu})\,d\mathbb{B}^i_v$$

であるが，固定した $u, s$ に対して $\mathbb{Y}_v := \mathbb{X}^\tau_{vs} - \mathbb{X}^\tau_{vu}$ とおくと

$$\Gamma_{\mathbb{B}_{wv}}\mathbb{Y}_v - \mathbb{Y}_w = \Gamma_{\mathbb{B}_{wv}}(\Gamma_{\mathbb{B}_{vs}}\tau - \Gamma_{\mathbb{B}_{vu}}\tau) - (\Gamma_{\mathbb{B}_{ws}}\tau - \Gamma_{\mathbb{B}_{wu}}\tau) = 0$$

であることより，定理 3.3 の証明において $\Xi_{ts} - \Xi_{tu} - \Xi_{us} = 0$ となる．このような $\mathbb{Y}$ に対しては

$$\int_u^t \mathbb{Y}_v\,d\mathbb{B}^i_v = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^N \mathbb{B}_{t_k t_{k-1}}[I(\mathbb{Y}_{t_{k-1}}\circ^i)] = \mathbb{B}_{tu}[I(\mathbb{Y}_u\circ^i)] = \mathbb{B}_{tu}[I(\mathbb{X}^\tau_{us}\circ^i)]$$

となるから，等式 (3.6)（Chen の関係式と同値）も成り立つ． ■

第 3 回の内容

- 正則性構造, model, modelled distribution
- 再構成定理
- SSPDE に対応する正則性構造

# 4 正則性構造理論の基礎

Hairer [69] の正則性構造理論の基礎を解説する．

## 4.1 正則性構造

**定義 4.1.**
次の条件を満たす $\mathscr{T}=(A,T,G)$ を**正則性構造 (regularity structure)** という．

(1) $A\subset\mathbb{R}$ は下から有界で，局所的に有限である．

(2) $T=\bigoplus_{\alpha\in A}T_\alpha$ は Banach 空間の族 $\{(T_\alpha,\|\cdot\|_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ の代数的直和である．

(3) $G$ は $T$ 上の全単射連続線形写像の群で，次の性質を満たす．

$$\Gamma\in G,\ \alpha\in A,\ \tau\in T_\alpha \quad\Rightarrow\quad \Gamma\tau-\tau\in\bigoplus_{\beta\in A,\,\beta<\alpha}T_\beta.$$

$\min A$ を $\mathscr{T}$ の **regularity** という．また，$T$ の部分空間 $V=\bigoplus_{\alpha\in A}V_\alpha$ で，$(A,V,G)$ が正則性構造となっているものを $\mathscr{T}$ の **sector** という．

## 4.2 Model

以下，**scaling** と呼ばれる多重指数 $\mathfrak{s}=(\mathfrak{s}_i)_{i=1}^d\in\mathbb{N}_+^d$ を固定して，

$$|k|_\mathfrak{s}:=\sum_{i=1}^d\mathfrak{s}_ik_i\quad(k\in\mathbb{N}^d),\qquad \|x\|_\mathfrak{s}:=\sum_{i=1}^d|x_i|^{\frac{1}{\mathfrak{s}_i}}\quad(x\in\mathbb{R}^d)$$

とおく．特に，$\mathfrak{s}=(1,1,\dots,1)$ を**標準的な** **scaling**, $\mathfrak{s}=(2,1,\dots,1)$ を**放物型** **scaling** という．$M$ を $\mathfrak{s}_1,\dots,\mathfrak{s}_d$ の最小公倍数とし，急減少関数の族 $\{Q_t\}_{t>0}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を

$$\widehat{Q_t}(\xi)=\exp\left(-t\sum_{i=1}^d\xi_i^{\frac{2M}{\mathfrak{s}_i}}\right)\qquad(\xi\in\mathbb{R}^d)$$

によって定める．$\widehat{(\cdot)}$ は $\mathbb{R}^d$ 上の Fourier 変換を表す．このとき，$\{Q_t\}_{t>0}$ は**半群性** $Q_t*Q_s=Q_{t+s}$ $(t,s\geq0)$ を満たす．

**問 10.**
$Q_t(x)=t^{-\frac{|\mathfrak{s}|}{2M}}Q_1\big(t^{-\frac{\mathfrak{s}_1}{2M}}x_1,t^{-\frac{\mathfrak{s}_2}{2M}}x_2,\dots,t^{-\frac{\mathfrak{s}_d}{2M}}x_d\big)$ と表されることを示せ．

**定義 4.2.**
$\alpha < 0$ とする．

$$\|\xi\|_\alpha := \sup_{0<t\le 1} t^{-\frac{\alpha}{2M}} \|Q_t * \xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty$$

を満たす超関数 $\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 全体からなる Banach 空間を $\mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$ と表す.

**注意 4.3.**
他にも，テスト関数の族を使うもの [69, Definition 3.7], ウェーブレット解析によるもの [69, Proposition 3.20], Littlewood-Paley 分解によるもの [7, Definition 2.68] など,（ほぼ）同値な定義の仕方が色々ある．なお，$\mathcal{C}^\alpha_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$ の定義を含め，この章において「$\mathbb{R}^d$ 上の sup」をとっている箇所は，本来の定義 ([69]) では「任意のコンパクト集合 $K(\subset \mathbb{R}^d)$ 上の sup」であることを注意しておく（cf. 命題 6.1）．以下のほとんどの議論においては，この違いを意識していなくても差し支えない.

**定義 4.4.**
$\mathscr{T}$ を正則性構造とする．次の条件を満たす $\Gamma = \{\Gamma_{xy}\}_{x,y\in\mathbb{R}^d} \subset G$ と $\Pi = \{\Pi_x\}_{x\in\mathbb{R}^d} \subset \mathcal{L}(T, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ の組 $Z = (\Pi, \Gamma)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の **model** という.

(1) $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$, $\Gamma_{xx} = \mathrm{Id}_T$, $\Pi_y = \Pi_x\Gamma_{xy}$ $(x, y, z \in \mathbb{R}^d)$.

(2) 任意の $\gamma > 0$ に対して,

$$\|\Gamma\|_\gamma := \max_{\beta<\alpha<\gamma} \sup_{\tau\in T_\alpha\setminus\{0\}} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} \frac{\|\pi_\beta \Gamma_{xy}\tau\|_\beta}{\|\tau\|_\alpha \|x-y\|_{\mathfrak{s}}^{\alpha-\beta}} < \infty, \tag{4.1}$$

$$\|\Pi\|_\gamma := \max_{\alpha<\gamma} \sup_{\tau\in T_\alpha\setminus\{0\}} \sup_{0<t\le 1} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{|(Q_t * \Pi_x\tau)(x)|}{\|\tau\|_\alpha\, t^{\frac{\alpha}{2M}}} < \infty. \tag{4.2}$$

ただし，$\pi_\beta : T \to T_\beta$ は標準的な射影を表す.

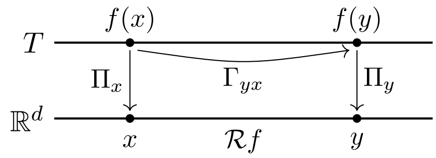
$\mathbb{R}^d$ 上の model 全体からなる集合を $\mathscr{M}(\mathscr{T})$ と表す.

**注意 4.5.**
注意 2.4 と同様に，$\mathscr{M}(\mathscr{T})$ は線形空間ではないが完備距離空間となる.

**問 11.**
$\alpha > 0$ とする．$f_x(y) = (y-x)^k$ $(k \in \mathbb{N}^d)$ に対し，$(Q_t * f_x)(x) = O(t^{\frac{|k|_{\mathfrak{s}}}{2M}})$ を示せ.

## 4.3 再構成定理

以下は再構成定理の概念図である.



**定義 4.6.**
$\mathscr{T}$ を正則性構造，$Z \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$, $\gamma \in \mathbb{R}$ とする．連続関数 $f : \mathbb{R}^d \to T_{<\gamma} := \bigoplus_{\alpha<\gamma} T_\alpha$ で，

$$\|\!|f|\!\|_\gamma := \sup_{\alpha<\gamma} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|\pi_\alpha f(x)\|_\alpha + \sup_{\alpha<\gamma} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} \frac{\big\|\pi_\alpha\big(f(x) - \Gamma_{xy} f(y)\big)\big\|_\alpha}{\|x-y\|_{\mathfrak{s}}^{\gamma-\alpha}} < \infty$$

を満たすもの全体からなる Banach 空間を $\mathcal{D}_Z^\gamma(\mathbb{R}^d)$ と表す．$\mathcal{D}_Z^\gamma(\mathbb{R}^d)$ の元を $\gamma$**-modelled distribution** という．

**定理 4.1 (再構成定理 [69, Theorem 3.10], [27, Theorem 5.1]).**
$\mathscr{T}$ を regularity $\alpha_0 < 0$ の正則性構造とし，$Z = (\Pi, \Gamma) \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$ とする．$\gamma > 0$ ならば，連続線形写像

$$\mathcal{R}_Z : \mathcal{D}_Z^\gamma(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha_0}(\mathbb{R}^d)$$

が一意的に存在し，任意の $f \in \mathcal{D}_Z^\gamma(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\sup_{0<t\le 1} t^{-\frac{\gamma}{2M}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |Q_t * (\mathcal{R}_Z f - \Pi_x f(x))(x)| \lesssim \|\Pi\|_\gamma \|\!|f|\!\|_\gamma \tag{4.3}$$

を満たす．このような $\mathcal{R}_Z$ を**再構成作用素 (reconstruction operator)** という．さらに，写像 $(Z, f) \mapsto \mathcal{R}_Z f$ は局所 Lipschitz 連続である．

**注意 4.7.**
$Z$ が文脈上明らかなときは，$\mathcal{D}^\gamma(\mathbb{R}^d), \mathcal{R}$ と略記する．

**証明** [69, 61, 27] などいくつかの証明が知られているが，ここでは [114, 14] に基づく，作用素半群 $\{Q_t\}_{t>0}$ を使った証明を紹介する．各 $0 < s < t$ に対し，$\mathcal{R}_s^t : \mathcal{D}^\gamma(\mathbb{R}^d) \to C_b(\mathbb{R}^d)$ を

$$\mathcal{R}_s^t f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} Q_{t-s}(x-y)\big(Q_s * \Pi_y f(y)\big)(y) dy$$

と定義する．証明を 4 段階に分けて行う．

**(1) $s \to 0$ での収束：**半群性と model の定義より，$0 < r < s < t$ に対して

$$\mathcal{R}_r^t f(x) - \mathcal{R}_s^t f(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^2} Q_{t-s}(x-y) Q_{s-r}(y-z) Q_r * \big\{\Pi_z\big(f(z) - \Gamma_{zy} f(y)\big)\big\}(z) dydz$$

となる．Modelled distribution の定義と，$Q_t$ のスケール変換（問 10）から，$r \in [\frac{s}{2}, s)$ に対しては

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_r^t f(x) - \mathcal{R}_s^t f(x)| &\lesssim \sum_{\alpha<\gamma} r^{\frac{\alpha}{2M}} \int_{(\mathbb{R}^d)^2} |Q_{t-s}(x-y)||Q_{s-r}(y-z)|\|z-y\|_{\mathfrak{s}}^{\gamma-\alpha} dydz \\ &\lesssim \sum_{\alpha<\gamma} r^{\frac{\alpha}{2M}} (s-r)^{\frac{\gamma-\alpha}{2M}} \lesssim s^{\frac{\gamma}{2M}} \end{aligned} \tag{4.4}$$

となる．$r\in(0,\frac{s}{2})$ に対しても，$r\in[\frac{s}{2^{n+1}},\frac{s}{2^n})$ を満たす $n\in\mathbb{N}_+$ をとれば

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}^t_r f(x)-\mathcal{R}^t_s f(x)| &\le \sum_{m=0}^{n-1}|\mathcal{R}^t_{\frac{s}{2^m}}f(x)-\mathcal{R}^t_{\frac{s}{2^{m+1}}}f(x)|+|\mathcal{R}^t_{\frac{s}{2^n}}f(x)-\mathcal{R}^t_r f(x)|\\ &\lesssim \sum_{m=0}^{n-1}\left(\frac{s}{2^m}\right)^{\frac{\gamma}{2M}}+\left(\frac{s}{2^n}\right)^{\frac{\gamma}{2M}}\lesssim s^{\frac{\gamma}{2M}}\end{aligned}$$

となるため，結局 (4.4) の評価はすべての $0<r<s$ で成り立つ．よって $\{\mathcal{R}^t_s f(x)\}$ は $s\to 0$ のとき Cauchy 有向族であり，極限

$$\mathcal{R}^t_0 f(x):=\lim_{s\to 0}\mathcal{R}^t_s f(x)$$

が存在する．

**(2) 一様評価：**$|\mathcal{R}^t_{t-}f(x)|\lesssim\sum_{\alpha<\gamma}t^{\frac{\alpha}{2M}}\lesssim t^{\frac{\alpha_0}{2M}}$ であるから，(4.4) と合わせれば

$$\|\mathcal{R}^t_0 f\|_{L^\infty}\lesssim t^{\frac{\alpha_0}{2M}} \tag{4.5}$$

を得る．また，半群性より $Q_t*\mathcal{R}^s_r f=\mathcal{R}^{t+s}_r f$ であるが，$r\to 0$ とすれば

$$Q_t*\mathcal{R}^s_0 f=\mathcal{R}^{t+s}_0 f \tag{4.6}$$

となるから，

$$\|Q_t*\mathcal{R}^s_0 f\|_{L^\infty}\lesssim (t+s)^{\frac{\alpha_0}{2M}}\lesssim t^{\frac{\alpha_0}{2M}}$$

より，$\{\mathcal{R}^s_0 f\}_{s\in(0,1]}$ は $\mathcal{C}^{\alpha_0}_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$ で有界である．

**(3) $t\to 0$ での収束：**$Q_t$ の $t$ に関する連続性（cf. [104, Proposition 3.12] など）より，任意の $0<s<t,\ \varepsilon>0$ に対し

$$\|\mathcal{R}^t_0 f-\mathcal{R}^s_0 f\|_{\alpha_0-\varepsilon}=\|Q_{t-s}*\mathcal{R}^s_0 f-\mathcal{R}^s_0 f\|_{\alpha_0-\varepsilon}\lesssim (t-s)^{\frac{\varepsilon}{2M}}\|\mathcal{R}^s_0 f\|_{\alpha_0}$$

であるから，(2) の一様評価より，$\{\mathcal{R}^t_0 f\}_{t\in(0,1]}$ は $\mathcal{C}^{\alpha_0-\varepsilon}_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$ において Cauchy 有向族である．よって極限

$$\mathcal{R}f:=\lim_{t\to 0}\mathcal{R}^t_0 f\in\mathcal{C}^{\alpha_0-\varepsilon}_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$$

が存在する．(4.6) において $s\to 0$ とすると $Q_t*\mathcal{R}f=\mathcal{R}^t_0 f$ となるから，(4.5) より実際には $\mathcal{R}f\in\mathcal{C}^{\alpha_0}_{\mathfrak{s}}(\mathbb{R}^d)$ である．さらに，(4.4) において $r\to 0,\ s\to t$ とすれば，(4.3) が従う．

**(4) 一意性：**超関数 $\mathcal{R}^1 f,\mathcal{R}^2 f$ が (4.3) を満たすとする．$g=\mathcal{R}^1 f-\mathcal{R}^2 f$ とおくと，

$$\|Q_t*g\|_{L^\infty}\lesssim t^{\frac{\gamma}{N}}\to 0\qquad(t\to 0)$$

となるから,（超関数の意味で）$Q_t*g\to g\ (t\to 0)$ より $g=0$ である．

## 4.4　正則性構造の構成

### 4.4.1　多項式構造

例 3.1 の Hopf 代数 $X$ を考える．

**定義 4.8.**
次のように定義される正則性構造 $\mathscr{X} = (\mathbb{N}, X, \mathbb{R}^d)$ を**多項式構造 (polynomial structure)** という．

(1) $X = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X_n := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \langle \bullet^k \,;\, |k|_{\mathfrak{s}} = n \rangle$.

(2) 各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対し，

$$\Gamma_x \bullet^k := (\mathrm{Id} \otimes g_x)\Delta \bullet^k = \sum_{\ell,m\,;\,\ell+m=k} \frac{k!}{\ell! m!} x^\ell \bullet^m .$$

ただし，$g_x : X \to \mathbb{R}$ は $g_x(\bullet^k) = x^k$ によって定義される代数準同型である．

さらに，次のように定義される $Z = (\Pi, \Gamma) \in \mathscr{M}(\mathscr{X})$ を**標準的な model** という．

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{x-y}, \qquad (\Pi_x \bullet^k)(y) = (y-x)^k.$$

**問 12.**
$\mathfrak{s}$ を標準的な scaling とする．$f \in C_b^n(\mathbb{R}^d)$ $(n \in \mathbb{N}_+)$ に対し，

$$\hat{f}(x) := \sum_{|k|<n} \frac{\partial^k f(x)}{k!} \bullet^k \tag{4.7}$$

とおくと，$\hat{f} \in \mathcal{D}_Z^n(\mathbb{R}^d)$ であることを示せ．ただし，$Z$ は標準的な model である．なお，この modelled distribution は

$$f(y) - (\Pi_x \hat{f}(x))(y) = f(y) - \sum_{|k|<n} \frac{\partial^k f(x)}{k!}(y-x)^k = O(|y-x|^n)$$

を満たすから，$\mathcal{R}_Z \hat{f} = f$ である．

### 4.4.2 Branched rough path に付随する正則性構造

$H, W$ を，3.2 章で定義した Connes-Kreimer 代数とその上の右余加群とする．

**命題 4.2.**
$\alpha \in (0,1]$ とする．各 $\beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$H_\beta := \langle \tau \in B_\bullet \,;\, \alpha\|\tau\| = \beta \rangle, \qquad W_\beta := \langle \tau \in B_\circ \,;\, \alpha\|\tau\| - 1 = \beta \rangle$$

とおく．また，$G$ の $W$ への左からの作用 $\Gamma^\circ$ を

$$\Gamma_g^\circ \tau = (\mathrm{Id} \otimes g)\Delta^\circ \tau$$

と定義する．このとき，$\mathscr{H} = (A := \alpha\mathbb{N}, H = \bigoplus_{\beta\in A} H_\beta, \{\Gamma_g\}_{g\in G})$ は regularity 0 の正則性構造となり，$\mathscr{W} = (A^\circ := \alpha\mathbb{N}_+ - 1, W = \bigoplus_{\beta\in A^\circ} W_\beta, \{\Gamma_g^\circ\}_{g\in G})$ は regularity $\alpha - 1$ の正則性構造となる．

この 2 つを合わせた正則性構造を $\mathscr{H} \oplus \mathscr{W} := (A \cup A^\circ, H \oplus W, \{\Gamma_g \oplus \Gamma_g^\circ\}_{g \in G})$ と表す．

**Branched rough path 理論と正則性構造理論の関係**

以下，rough path や controlled path の定義域を $\mathbb{R}$ 全体とする．

**問 13.**
任意の $\mathbb{B} \in \Omega^\alpha(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ に対し，

$$\begin{cases} (\Pi_s^{\mathbb{B}} \tau)(t) = \mathbb{B}_{ts}[\tau], \\ \big(\Pi_s^{\mathbb{B}}(\tau \circ^i)\big)(t) = \partial_t \mathbb{B}_{ts}[I(\tau \circ^i)] \end{cases} \quad (\tau \in B_\bullet), \qquad \Gamma_{ts}^{\mathbb{B}} := \Gamma_{\mathbb{B}_{ts}} \oplus \Gamma_{\mathbb{B}_{ts}}^\circ$$

とおくと，$Z^{\mathbb{B}} := (\Pi^{\mathbb{B}}, \Gamma^{\mathbb{B}}) \in \mathscr{M}(\mathscr{H} \oplus \mathscr{W})$ であることを示せ．

$\mathbb{Y} \in \mathcal{D}_{\mathbb{B}}^\gamma(\mathbb{R})$ $(\gamma > 0)$ とする．定義から明らかに $\mathbb{Y} \in \mathcal{D}_{Z^{\mathbb{B}}}^\gamma(\mathbb{R}; H)$ である．$\circ^i$ を $\tau \in B_\bullet$ に掛けると次数は $\alpha - 1$ だけ足されるから，$\mathbb{Y}\circ^i \in \mathcal{D}_{Z^{\mathbb{B}}}^{\gamma+\alpha-1}(\mathbb{R}; W)$ である．$\gamma + \alpha > 1$ ならば，定理 3.3 より

$$\partial_t \int_0^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}_u^i - \Pi_s(\mathbb{Y}_s \circ^i)(t) = \partial_t \bigg( \int_s^t \mathbb{Y}_u d\mathbb{B}_u^i - \mathbb{B}_{ts}[I(\mathbb{Y}_s \circ^i)] \bigg) = O(|t-s|^{\gamma+\alpha-1})$$

となるから，これは

$$\mathcal{R}_{Z^{\mathbb{B}}}(\mathbb{Y}\circ^i)(t) = \partial_t \int_0^t \mathbb{Y}_s d\mathbb{B}_s^i$$

であることを意味する．

# 5 確率偏微分方程式に対応する正則性構造

例として，動的 $\phi_3^4$ 模型の初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)\phi = -\phi^3 + \xi, & (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{T}^3 \\ \qquad \phi|_{t=0} = \phi_0, & x \in \mathbb{T}^3 \end{cases} \tag{5.1}$$

を考えるが，一般の SPDE (1.1) でも同様である．以下，時間変数 $t$ を $x_0$ と表し，4 次元時空変数を $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x')$ によって表す．また，放物型 scaling $\mathfrak{s} = (2, 1, 1, 1)$ を考える．

## 5.1 動的 $\phi^4$ 模型に付随する正則性構造

まずは積分方程式 (2.1) のように，(5.1) を Duhamel の式

$$\phi = P * \big\{ \mathbf{1}_{x_0 > 0}(-\phi^3 + \xi) \big\} + P\phi_0 \tag{5.2}$$

の形に直す．ここで，$P(x_0, x') = \mathbf{1}_{x_0>0} \frac{1}{\sqrt{4\pi x_0}^3} e^{-\frac{|x'|^2}{4x_0}}$ は $\Delta$ の熱核（を $x_0 \leq 0$ では零拡張したもの）であり，$*$ は $x = (x_0, x')$ に対する畳み込み，$P\phi_0$ は $x'$ のみに対する畳み込みを表す．これを方程式 (3.5) と見比べ，さらに Taylor 展開の構造 (4.7) を加えると，

$$\Phi = I(-\Phi^3 + \circ) + \sum_{k \in \mathbb{N}^4} \varphi_k \bullet^k \tag{5.3}$$

という形の方程式を考えればよさそうである．そこで，多項式構造 $\mathscr{X}$ と typed tree の正則性構造 $\mathscr{H} \oplus \mathscr{W}$ を合わせた正則性構造を考える．

**定義 5.1.**
Rooted tree $\tau$ と，**decoration** と呼ばれる写像

$$\mathfrak{t} : N_\tau \to \{0,1\}, \qquad \mathfrak{n} : N_\tau \to \mathbb{N}^4, \qquad \mathfrak{e} : E_\tau \to \mathbb{N}^4$$

の組 $(\tau, \mathfrak{t}, \mathfrak{n}, \mathfrak{e}) = (\tau, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}}$ を **(rooted) decorated tree** という．また，$\alpha_0 < 0 < \beta$ を固定し，**次数** $|(\tau, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}}|$ を次のように定義する．

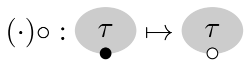
$$|(\tau, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}}| := \sum_{v \in N_\tau} (\alpha_0 |\mathfrak{t}(v)| + |\mathfrak{n}(v)|_{\mathfrak{s}}) + \sum_{p \in E_\tau} (\beta - |\mathfrak{e}(p)|_{\mathfrak{s}}). \tag{5.4}$$

3.2 章と同様に，$\mathfrak{t} = 0$ の頂点を $\bullet$，$\mathfrak{t} = 1$ の頂点を $\circ$ と表す．$(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) = (0, k)$ が与えられた 1 点グラフを $\bullet^k$ と表す．これは $X$ の基底と同じものである．Decorated tree $\tau$ が表す（超）関数を $(\mathbf{\Pi}\tau)(x)$ と表すと，形式的な対応関係は次のようになる.（注意 5.7 も参照せよ.）

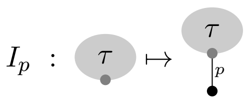
$$(\mathbf{\Pi} \bullet^k)(x) = x^k, \quad \mathbf{\Pi}(\tau\circ) = (\mathbf{\Pi}\tau)\xi, \quad \mathbf{\Pi}(I_p\tau) = \partial^p P * \mathbf{\Pi}\tau, \quad \mathbf{\Pi}(\tau\sigma) = (\mathbf{\Pi}\tau)(\mathbf{\Pi}\sigma)$$

ここで，decorated tree に対する演算を次のように定義する．

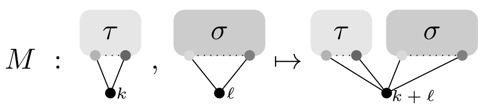
**定義 5.2.**
$\mathfrak{t}(\rho_\tau) = 0$ である $\tau$ に対し，その root の type を 1 に変えた decorated tree を $\tau\circ$ と表す.




Decorated tree $\tau$ の root から下に向かう辺を 1 本付け足し，その辺に $\mathfrak{e} = p$ を与え，新たな root に $(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) = (0, 0)$ を与えた decorated tree を $I_p\tau$ と表す．$p = 0$ のときは $I := I_0$ と表す.




$\mathfrak{t}(\rho_\tau) = \mathfrak{t}(\rho_\sigma) = 0$ である $\tau, \sigma$ を root で繋げ，その root に $(\mathfrak{t}, \mathfrak{n}) = (0, \mathfrak{n}(\rho_\tau) + \mathfrak{n}(\rho_\sigma))$ を与えた decorated tree を $M(\tau, \sigma)$ または $\tau\sigma$ と表す.




Decoration $\mathfrak{e}$ は，KPZ 方程式のように未知関数の微分を含む SPDE を考えるのに必要となる．今は考えなくてもよいが，未知関数の微分を含まない SPDE であっても，繰り込みには微分が関わってくることがある [21, Section 2.8.2]．$\alpha_0$ は $\xi$ の regularity を，$\beta$ は $P*$ による regularity の増加を表す数で，今は

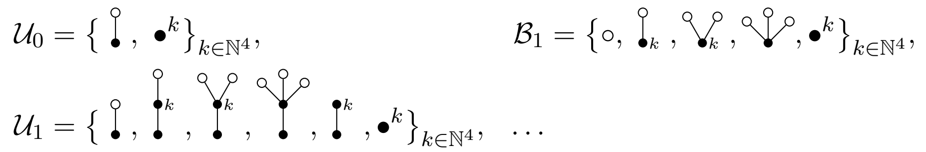
$$\alpha_0 = -\frac{5}{2} - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \qquad \beta = 2$$

とおけばよい.

**定義 5.3.**
Decorated tree の集合 $\mathcal{B},\mathcal{U}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n, \qquad \mathcal{U} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n,$$
$$\mathcal{B}_0 := \{\circ\}, \qquad \mathcal{U}_n := I(\mathcal{B}_n) \cup \{\bullet^k\}_{k\in\mathbb{N}^4},$$
$$\mathcal{B}_{n+1} := \{\circ\} \cup \{\tau_1\tau_2\tau_3 \ ; \ \tau_1,\tau_2,\tau_3 \in \mathcal{U}_n\}$$

実際に計算すると



となる．また，定義から $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ である．

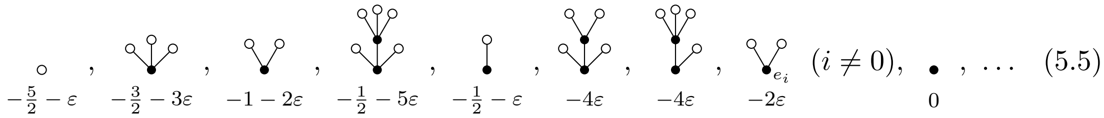
**命題 5.1.**
$\alpha_0 \in (-3,0)$, $\beta = 2$ とすると，$A := \{|\tau| \ ; \ \tau \in \mathcal{B}\}$ は下から有界な局所有限集合となる．

**問 14.**
$\alpha_n = \inf\{|\tau| \ ; \ \tau \in \mathcal{B}_n \setminus \mathcal{B}_{n-1}\}$ とおく．

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2(\alpha_0+2) \wedge 0 + 2$$

であることを示せ．

$\alpha_0 = -\frac{5}{2} - \varepsilon \ (0 < \varepsilon \ll 1)$ のとき，$\mathcal{B}$ の元を次数が低い方から順に並べると



となる．下の数字は次数を表す．

**定義 5.4.**
$\mathcal{B}$ によって生成される線形空間を $T$ と表す．また，decorated tree の集合

$$\mathcal{B}^+ = \left\{ \bullet^k \prod_{i=1}^{n} I_{p_i}\sigma_i \ ; \ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{N}^4, \\ \sigma_i \in \mathcal{B}, \ p_i \in \mathbb{N}^4, \ |\sigma_i| + 2 > |p_i|_{\mathfrak{s}} \ (i \in \{1,\dots,n\}) \end{array} \right\}$$

によって生成される線形空間を $T^+$ と表す．

次の結果は，定理 3.1 と同様に帰納的に証明できる．

**命題 5.2 ([69, Theorem 8.16]).**
線形写像 $\Delta : T \to T \otimes T^+$, $\Delta^+ : T^+ \to T^+ \otimes T^+$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)} \bullet^k &= \sum_{\ell,m\in\mathbb{N}^4\,;\,k=\ell+m} \frac{k!}{\ell!m!} \bullet^\ell \otimes \bullet^m, \qquad \Delta \circ = \circ \otimes \bullet, \\
\Delta I_p\tau &= (I_p \otimes \mathrm{Id})\Delta\tau + \sum_{q\in\mathbb{N}^4} \frac{1}{q!} \bullet^q \otimes I^+_{p+q}\tau, \qquad (\tau \in \mathcal{B}) \\
\Delta^+ I_p\tau &= (I^+_p \otimes \mathrm{Id})\Delta\tau + \sum_{q\in\mathbb{N}^4} \frac{1}{q!} \bullet^q \otimes I^+_{p+q}\tau, \qquad (\tau \in \mathcal{B},\ |\tau| + 2 > |p|_{\mathfrak{s}}) \\
\Delta(\tau\sigma) &= (\Delta\tau)(\Delta\sigma), \qquad (\tau, \sigma \in \mathcal{B} \text{ s.t. } \tau\sigma \in \mathcal{B}) \\
\Delta^+(\tau\sigma) &= (\Delta^+\tau)(\Delta^+\sigma). \qquad (\tau, \sigma \in \mathcal{B}^+)
\end{aligned}$$

ただし，$I^+_p : T \to T^+$ は，$\tau \in \mathcal{B}$ に対して

$$I^+_p\tau = \begin{cases} I_p\tau & (|\tau| + 2 > |p|_{\mathfrak{s}}), \\ 0 & (|\tau| + 2 \le |p|_{\mathfrak{s}}) \end{cases}$$

と定義される線形写像である．このとき，$(T^+, M, \bullet, \Delta^+, \bullet^*)$ は Hopf 代数の構造をもつ．また，$\Delta$ は右余加群性

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta^+)\Delta$$

を満たす．従って，$T^+$ の指標群を $G$ とすると，$G$ の $T$ への左からの作用が

$$\Gamma_g := (\mathrm{Id} \otimes g)\Delta \qquad (g \in G)$$

によって定義される．

**定理 5.3 ([69, Theorem 8.24]).**
各 $\alpha \in A$ に対して $T_\alpha = \langle \tau \in \mathcal{B}\,;\, |\tau| = \alpha \rangle$ とおくと，$\mathscr{T} = (A, T, G)$ は正則性構造となる．

$\Delta, \Delta^+$ を (3.2) のように直接的に定義することも可能であるが，$\mathfrak{n}, \mathfrak{e}$ が関わってくるために非常に複雑な式となる．

**定義 5.5.**
Decorated tree 全体から生成される線形空間を $V$ と表す．線形写像

$$D^+ : V \to V \hat{\otimes} V$$

を，任意の decorated tree $(\tau, \mathfrak{t})^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{e}}$ に対して

$$D^+(\tau, \mathfrak{t})^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{e}} = \sum_{\sigma \in A(\tau)} \sum_{\mathfrak{n}_\sigma, \mathfrak{e}_{\partial\sigma}} \frac{1}{\mathfrak{e}_{\partial\sigma}!} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}_\sigma} (\sigma, \mathfrak{t}|_{N_\sigma})^{\mathfrak{n}_\sigma + \pi\mathfrak{e}_{\partial\sigma}}_{\mathfrak{e}} \otimes (\tau/\sigma, \mathfrak{t} \cdot \mathbf{1}_{N_\tau \setminus N_\sigma})^{[\mathfrak{n}-\mathfrak{n}_\sigma]_\sigma}_{\mathfrak{e}+\mathfrak{e}_{\partial\sigma}} \tag{5.6}$$

として定義する.（テンソル積 $\hat{\otimes}$ は無限和を許すように定義される．詳しくは [23, Section 2.3] を参照せよ.）ただし，

- $\mathfrak{n}_\sigma : N_\sigma \to \mathbb{N}^4$ は，$N_\sigma$ 上で $\mathfrak{n}_\sigma \leq \mathfrak{n}$ となるもの全体を動く．また，

$$\binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}_\sigma} := \prod_{v \in N_\sigma} \binom{\mathfrak{n}(v)}{\mathfrak{n}_\sigma(v)} = \prod_{v \in N_\sigma} \frac{\mathfrak{n}(v)!}{\mathfrak{n}_\sigma(v)!(\mathfrak{n}(v) - \mathfrak{n}_\sigma(v))!}$$

  である．

- $\mathfrak{e}_{\partial\sigma} : \partial\sigma \to \mathbb{N}^4$ は，境界 $\partial\sigma := \{(v,w) \in E_\tau \,;\, v \in N_\sigma,\ w \notin N_\sigma\}$ 上の関数全体を動く．ただし，辺 $(v,w)$ は常に $v$ の方が root に近くなるように向き付けられている．また，$\mathfrak{e}_{\partial\sigma}! := \prod_{p \in \partial\sigma} \mathfrak{e}_{\partial\sigma}(p)!$ である．

- $\pi\mathfrak{e}_{\partial\sigma} : N_\sigma \to \mathbb{N}^4$ を，$\pi\mathfrak{e}_{\partial\sigma}(v) = \sum_{p=(v,w) \in \partial\sigma} \mathfrak{e}_{\partial\sigma}(p)$ によって定める．

- 任意の関数 $\mathfrak{m} : N_\tau \to \mathbb{N}^4$ に対し，$[\mathfrak{m}]_\sigma : N_{\tau/\sigma} \to \mathbb{N}^4$ を

$$[\mathfrak{m}]_\sigma(\pi(v)) = \sum_{w \in \pi(v)} \mathfrak{m}(w)$$

  によって定める．ここで，$\pi : N_\tau \to N_{\tau/\sigma}$ は標準的な射影を表す.

**命題 5.4 ([23, Proposition 5.34]).**
$p_+ : V \to T^+$ を標準的な射影とすると，

$$\Delta = (\mathrm{Id} \otimes p_+) D^+|_T, \qquad \Delta^+ = (p_+ \otimes p_+) D^+|_{T^+}$$

が成立する.

第 4 回の内容

- Modelled distribution としての解
- 繰り込みの具体例
- Admissible model の変形

### 5.2 Admissible model

以下，$\mathscr{T} = (A, T, G)$ を定理 5.3 の正則性構造とする．

**定義 5.6.**
線形写像 $\mathbf{\Pi} : T \to C^\infty(\mathbb{R}^4)$ が **admissible interpretation map**（[23] では単に「admissible」）であるとは,

$$(\mathbf{\Pi}\, \bullet^k)(x) = x^k, \qquad \mathbf{\Pi}(I_p\tau) = \partial^p P * \mathbf{\Pi}\tau \tag{5.7}$$

を満たすことをいう．また，任意の $\xi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^4)$ に対し，admissible interpretation map $\mathbf{\Pi}^\xi : T \to C^\infty(\mathbb{R}^4)$ を

$$\mathbf{\Pi}^\xi \circ = \xi, \qquad \mathbf{\Pi}^\xi(\tau\sigma) = (\mathbf{\Pi}^\xi\tau)(\mathbf{\Pi}^\xi\sigma)$$

によって定義する．

**注意 5.7.**
(5.7) の第 2 式はあくまで形式的なものである．$P$ は $\mathbb{R}^4$ 全体で可積分ではないから，畳み込みをとるためには，$P$ を遠方でカットするなどの工夫が必要である．詳細は [69, lemma 7.7] などを参照せよ．また，右辺を “$\partial^p\{P * (\mathbf{1}_{x_0>0}\mathbf{\Pi}\tau)\}$” としないのは，$x_0 = 0$ での境界条件を扱う面倒を避けるためである．

**命題 5.5 ([23, Lemma 6.10]).**
任意の admissible interpretation map $\mathbf{\Pi}$ に対し，$L(\mathbf{\Pi}) := (\Pi, \Gamma)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} &g_x \in G, \qquad \Pi_x := (\mathbf{\Pi} \otimes g_x^{-1})\Delta, \qquad \Gamma_{yx} := \Gamma_{g_y * g_x^{-1}}, \\ &g_x^{-1}(\bullet^k) := (-x)^k, \qquad g_x^{-1}(I_p\tau) := -\sum_{|q|_\mathfrak{s} < |\tau|+2-|p|_\mathfrak{s}} \frac{(-x)^q}{q!}(\partial^{p+q} P * \Pi_x\tau)(x). \end{aligned} \tag{5.8}$$

このとき，$\Pi_x$ は次式を満たす．

$$\begin{aligned} &(\Pi_x \bullet^k)(y) = (y-x)^k, \\ &(\Pi_x I_p\tau)(y) = (\partial^p P * \Pi_x\tau)(y) - \sum_{|q|_\mathfrak{s} < |\tau|+2-|p|_\mathfrak{s}} \frac{(y-x)^q}{q!}(\partial^{p+q} P * \Pi_x\tau)(x). \end{aligned} \tag{5.9}$$

(5.8) の第 2,3 式から，関係式 $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$, $\Gamma_{xx} = \mathrm{Id}$, $\Pi_y = \Pi_x\Gamma_{xy}$ が直ちに従う．

**定義 5.8.**
$\mathbf{\Pi}$ を admissible interpretation map として，$L(\mathbf{\Pi})$ の形で表される model 全体からなる集合を $\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}^{\infty}(\mathscr{T})$ と表す．$\mathscr{M}(\mathscr{T})$ における $\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}^{\infty}(\mathscr{T})$ の閉包を $\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ と表す．$\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ の元を **admissible model** という．

**命題 5.6 ([69, Proposition 8.27], [23, Proposition 6.12]).**
任意の $\xi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^4)$ に対し，$Z^{\xi} := L(\mathbf{\Pi}^{\xi})$ は admissible model である．これを $\xi$ に対する **canonical model** という．

### 5.3 Modelled distribution としての解

$t > 0$ を十分小さくとり，$D_t = (0, t) \times \mathbb{T}^3$ 上で方程式 (5.2) を解く．具体的には，(3.5) と同様な写像の合成

$$\begin{aligned}\Phi \in \mathcal{D}^{\gamma}(D_t; U) &\mapsto -\Phi^3 + \circ \in \mathcal{D}^{\gamma+2\alpha_0+4}(D_t; T)\\ &\mapsto \mathcal{P}\big\{\mathbf{1}_{x_0>0}(-\Phi^3 + \circ)\big\} \in \mathcal{D}^{\gamma+2\alpha_0+6}(D_t; U)\end{aligned} \tag{5.10}$$

の下で，不動点問題

$$\Phi = \pi_{<\gamma}\big[\widehat{P\phi_0} + \mathcal{P}\big\{\mathbf{1}_{x_0>0}(-\Phi^3 + \circ)\big\}\big] \tag{5.11}$$

を考える．ここで，$U$ は $\mathcal{U}$ によって生成される sector であり，また $\widehat{P\phi_0}$ は，(4.7) において $|k|$ を $|k|_{\mathfrak{s}}$ に置き換えて得られる，$P\phi_0$ の多項式構造 $\mathscr{X}$ への持ち上げである

**注意 5.9.**
実際には，$x_0 = 0$ での発散を許すような **singular modelled distribution** の空間 $\mathcal{D}^{\gamma,\eta}$ [69, Section 6] を考える必要がある．

(5.10) の 1 つ目の矢印における modelled distribution の積は well-defined である (cf. [69, Section 4, Section 6])．2 つ目の矢印における $\mathcal{P}$ は，(3.5) の積分写像に多項式構造を加えた

$$\mathcal{P}\Psi = \sum_{k\in\mathbb{N}^4} \psi_k \bullet^k + I(\Psi) \tag{5.12}$$

という形の写像で，次の条件を満たすものである．

**定理 5.7 ([69, Theorem 5.12, Lemma 7.3]).**
$\gamma > 0$ かつ $\gamma \notin \mathbb{N}$ とする．任意の $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ に対し，(5.12) の形の連続線形写像 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_Z : \mathcal{D}_Z^{\gamma}(\mathbb{R}^4) \to \mathcal{D}_Z^{\gamma+2}(\mathbb{R}^4; U)$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{D}_Z^{\gamma}(\mathbb{R}^4)$ に対して

$$\mathcal{R}_Z\mathcal{P}_Z f = P * \mathcal{R}_Z f$$

を満たす．

Model $Z=(\Pi,\Gamma)\in\mathscr{M}(\mathscr{T})$ が（空間方向に）**周期的**であるということを，

$$(\Pi_{x+e_i}\tau)(y+e_i)=(\Pi_x\tau)(y),\qquad \Gamma_{(x+e_i)(y+e_i)}=\Gamma_{xy},\qquad (i\in\{1,2,3\})$$

が成り立つこととして定める．

**定理 5.8 ([69, Theorem 7.8]).**
$\alpha_0\in(-3,0)$ かつ $\gamma>\max\{-2\alpha_0-4,0\}$ とする．任意の初期値 $\phi_0\in\mathcal{C}^{-\frac{2}{3}+}(\mathbb{T}^3)$ と，任意の周期的な $Z\in\mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ に対し，ある $t>0$ が存在して，方程式 (5.11) の解 $\Phi\in\mathcal{D}_Z^\gamma(D_t;U)$ がただ 1 つ存在する．また，解写像 $\mathbb{S}:(\phi_0,Z)\mapsto\Phi$ は局所 Lipschitz 連続である．

これまでの議論により，次のような可換図式が構成できることを確認する．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, mapsto, "\mathbb{S}"] & \Phi \arrow[d, mapsto, "\mathcal{R}"] \\ \xi \arrow[u, dashed, mapsto, "\iota"] \arrow[r, dashed, mapsto, "S"] & \phi \end{tikzcd}$$

$\xi\in C_b^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{T}^3)$ とし，canonical model $Z^\xi$ に対する解を $\Phi=\mathbb{S}(\phi_0,Z^\xi)$ とおく．$\phi=\mathcal{R}\Phi$ とおくと，定理 5.7 より

$$\begin{aligned}\phi=\mathcal{R}\Phi&=P\phi_0+\mathcal{R}\mathcal{P}\big\{\mathbf{1}_{x_0>0}(-\Phi^3+\circ)\big\}\\ &=P\phi_0+P*\mathcal{R}\big\{\mathbf{1}_{x_0>0}(-\Phi^3+\circ)\big\}\end{aligned}$$

となる．$\mathbf{\Pi}^\xi$ と積の可換性から，$\mathcal{R}$ も積と可換であるため (cf. [69, Remark 3.15]),

$$\mathcal{R}\big\{\mathbf{1}_{x_0>0}(-\Phi^3+\circ)\big\}=\mathbf{1}_{x_0>0}\big\{-(\mathcal{R}\Phi)^3+\xi\big\}=\mathbf{1}_{x_0>0}(-\phi^3+\xi)$$

となる．よって，$\phi$ は初期値問題 (5.1) を満たす．

# 6 Model の繰り込み

この章からようやく確率論の出番である．目標は時空ホワイトノイズ $\xi$ を上記の図式に代入することであるが，超関数 $\xi$ に対する canonical model を直接構成することはできないため，まずは近似列 $\xi_n=\xi*\rho_n$ に対する canonical model $Z^n=Z^{\xi_n}$ を考えることになる．$Z^n$ が $n\to\infty$ のとき収束するとは限らないが，実は $\{Z^n\}$ から収束列 $\{\hat{Z}^n\}$ を得る標準的な方法が存在する．この章では，[69, 23, 20] などに従い，その方法を解説する．

## 6.1 確率論からの準備

この章の内容については，[92, 108] などを参照せよ．以下，$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間とする．

**定義 6.1.**
$D\subset\mathbb{R}^d$ を Borel 可測集合とする．線形写像 $\xi:L^2(D,dx)\to L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ で，任意の $h\in H$ に対して，$\xi(h)$ が平均 0, 分散 $\|h\|_{L^2(D)}^2$ の Gauss 確率変数であるものを，$D$ 上の**ホワイトノイズ**という．

**命題 6.1.**
$\mathfrak{s} \in \mathbb{N}_+^d$ を $\mathbb{R}^d$ 上の scaling とする．$\xi$ を $\mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズとすると，確率変数 $\tilde{\xi} : \Omega \to \mathcal{C}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}^{-\frac{|\mathfrak{s}|}{2}-}(\mathbb{R}^d)$ で，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\langle \tilde{\xi}, f \rangle = \xi(f) \quad \text{a.s.}$$

を満たすものが存在する．(以後，$\tilde{\xi}$ と $\xi$ を同一視する．) ここで，$\mathcal{C}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$ $(\alpha < 0)$ は，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して

$$\|\xi\|_{\alpha,K} := \sup_{0<t\le 1} t^{-\frac{\alpha}{2M}} \|Q_t * \xi\|_{L^\infty(K)} < \infty$$

を満たす超関数 $\xi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 全体からなる Fréchet 空間である．

**証明** 修正 $\tilde{\xi}$ の構成については，[104, Lemma 5.2] などを参照せよ．ここでは regularity が $-\frac{|\mathfrak{s}|}{2}-$ であることのみ示す．$Q_t$ のスケール変換より

$$\mathbb{E}[|Q_t * \xi(x)|^2] = \mathbb{E}\big[\big|\xi\big(Q_t(x-\cdot)\big)\big|^2\big] = \int_{\mathbb{R}^d} Q_t(x-y)^2 dy \lesssim t^{-\frac{|\mathfrak{s}|}{2M}}$$

となるから，Gauss 確率変数の**超縮小性** ([92, Theorem 3.50]) より，任意の $p \ge 2$ に対して

$$\mathbb{E}[|Q_t\xi(x)|^p] \lesssim t^{-\frac{|\mathfrak{s}|}{2M}\frac{p}{2}}$$

を得る．よって，$\alpha < -\frac{|\mathfrak{s}|}{2}$ ならば，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して

$$\mathbb{E}\big[\|\xi\|_{B^{\alpha}_{p,p,\mathfrak{s}}(K)}^p\big] = \int_0^1 \frac{dt}{t}\big(t^{-\frac{\alpha}{2M}}\mathbb{E}\|Q_t * \xi\|_{L^p(K)}\big)^p \lesssim \int_0^1 \frac{dt}{t} t^{-\frac{p}{2M}(\alpha+\frac{|\mathfrak{s}|}{2})} dt < \infty$$

を得る．(Besov 空間 $B^{\alpha}_{p,q,\mathfrak{s}}$ の定義については [71, Definition 2.1] などを参照せよ．) **Besov 埋め込み** [7, Proposition 2.71] より $B^{\alpha}_{p,p,\mathfrak{s}}(K) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha-\frac{|\mathfrak{s}|}{p}}(K)$ であるから，$p$ を十分大きくとれば，任意の $\alpha < -\frac{|\mathfrak{s}|}{2}$ に対して $\xi \in \mathcal{C}^{\alpha}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a.s. となる． ■

以下，$\xi$ を $\mathbb{R}^d$ 上のホワイトノイズとする．

**定義 6.2.**
$A$ を有限集合とする．

(1) $A$ の元の組 $\{a,b\}$ $(a \ne b)$ からなる集合 $\gamma$ で，$\gamma$ のどの 2 元も互いに交わらないものを，**Feynman 図**という．特に，$\bigcup_{p\in\gamma} p = A$ であるものを**完全 Feynman 図**という．Feynman 図 (resp. 完全 Feynman 図) 全体からなる集合を $F(A)$ (resp. $F_c(A)$) と表す．

(2) $\{X_a\}_{a\in A}$ を Gauss 確率変数の族とする．各 $\gamma \in F(A)$ に対し，

$$\mathbb{E}_\gamma(\{X_a\}_{a\in A}) := \prod_{\{a,b\}\in\gamma} \mathbb{E}[X_a X_b] \prod_{c \in A\setminus \bigcup_{p\in\gamma} p} X_c \tag{6.1}$$

と定義する．

**定理 6.2 ([92, Theorem 1.28]).**
任意の $f_1,\dots,f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，次式が成り立つ．ただし，$\sum_{\gamma\in\emptyset}=0$ とする．

$$\mathbb{E}[\xi(f_1)\cdots\xi(f_n)] = \sum_{\gamma\in F_c(\{1,\dots,n\})} \mathbb{E}_\gamma[\xi(f_1),\dots,\xi(f_n)].$$

**定義 6.3.**
任意の $f_1,\dots,f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，**Wick 積** $:\xi(f_1)\cdots\xi(f_n):$ を次のように定義する．

$$:\xi(f_1)\cdots\xi(f_n): := \sum_{\gamma\in F(\{1,\dots,n\})} (-1)^{|\gamma|}\mathbb{E}_\gamma[\xi(f_1),\dots,\xi(f_n)].$$

例えば

$$\begin{aligned} :\xi(f_1)\xi(f_2): &= \xi(f_1)\xi(f_2) - (f_1,f_2)_{L^2}, \\ :\xi(f_1)\xi(f_2)\xi(f_3): &= \xi(f_1)\xi(f_2)\xi(f_3) - (f_1,f_2)_{L^2}\xi(f_3) - (f_2,f_3)_{L^2}\xi(f_1) - (f_3,f_1)_{L^2}\xi(f_2) \end{aligned}$$

となる．

**命題 6.3.**
任意の $f_1,\dots,f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，次式が成り立つ．これを **Wiener カオス展開**という．

$$\xi(f_1)\cdots\xi(f_n) = \sum_{\gamma\in F(\{1,\dots,n\})} :\mathbb{E}_\gamma[\xi(f_1),\dots,\xi(f_n)]:.$$

ただし，右辺は (6.1) における $\prod_c X_c$ を Wick 積に置き換えることで定義される．

**定理 6.4 ([92, Theorem 3.9]).**
任意の $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し，次式が成り立つ．

$$\mathbb{E}[:\xi(f_1)\cdots\xi(f_n): \times :\xi(g_1)\cdots\xi(g_m):] = \mathbf{1}_{n=m}\sum_{s\in S_n}\prod_{i=1}^n (f_i, g_{s(i)})_{L^2}.$$

ただし，$S_n$ は $\{1,\dots,n\}$ の置換全体からなる群を表す．

**問 15.**
定理 6.2 を用いて，$n=m=2$ の場合に定理 6.4 を示せ．

### 6.2　繰り込みの具体例

$\xi$ を時空ホワイトノイズとし，近似列 $\xi_n = \xi * \rho_n$ に対する admissible interpretation map を $\mathbf{\Pi}^n := \mathbf{\Pi}^{\xi_n}$ とおく．考えたいのは，各 decorated tree $\tau$ に対し，$n \to \infty$ のとき収束するような変形 $\hat{\mathbf{\Pi}}^n\tau$ をどう定義するかということである．まず，

$$\vee$$

という decorated tree を考えよう．$\mathbf{\Pi}^n \vee$ を Wiener カオス展開すると

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Pi}^n \vee (x) = (P * \xi_n(x))^2 = \int_{(\mathbb{R}^4)^2} P(x-y)P(x-z)\xi_n(y)\xi_n(z)dydz \\
&= \int_{(\mathbb{R}^4)^2} P(x-y)P(x-z) :\xi_n(y)\xi_n(z): dydz + \int_{(\mathbb{R}^4)^2} P(x-y)P(x-z)C_n(y-z)dydz \\
&=: :\mathbf{\Pi}^n \vee: \ + a_n
\end{aligned}$$

となる．ここで，$C_n(y-z) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y-w)\rho_n(z-w)dw$ は $\xi_n$ の共分散関数であり，$n \to \infty$ のときデルタ関数 $\delta(y-z)$ に収束する．原点付近で $P(x) = O(\|x\|_{\mathfrak{s}}^{-3})$ であることを踏まえると，0 次の項は $n \to \infty$ のとき

$$a_n \to \int_{\mathbb{R}^4} P(x-y)^2 dy = \int_{\|x\|_{\mathfrak{s}} \le 1} O(\|x\|_{\mathfrak{s}}^{-6})dx = \infty$$

となる.（注意 5.7 で述べた通り，今は $P$ の原点付近での発散のみを考えている.）2 次の項については，まず共分散関数を計算すると

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(:\mathbf{\Pi}^n \vee:)(x_1)(:\mathbf{\Pi}^n \vee:)(x_2)] \\
&= 2\int_{(\mathbb{R}^4)^4} P(x_1-y_1)P(x_1-z_1)C_n(y_1-y_2)C_n(z_1-z_2)P(x_2-y_2)P(x_2-z_2)dy_1dy_2dz_1dz_2 \\
&\to 2\int_{(\mathbb{R}^4)^2} P(x_1-y)P(x_1-z)P(x_2-y)P(x_2-z)dydz \qquad (n \to \infty) \\
&= 2\big(P * \tilde{P}(x_1-x_2)\big)^2 \qquad (\tilde{P}(x) := P(-x))
\end{aligned}$$

となる．原点付近で $P(x) = O(\|x\|_{\mathfrak{s}}^{-3})$ であることから，$(P * \tilde{P})(x) = O(\|x\|_{\mathfrak{s}}^{-1})$ より

$$\mathbb{E}[(:\mathbf{\Pi}^n \vee:)(x_1)(:\mathbf{\Pi}^n \vee:)(x_2)] = O(\|x_1-x_2\|_{\mathfrak{s}}^{-2})$$

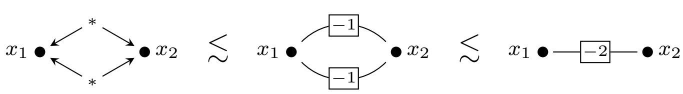
が得られる．

**問 16.**
$\mathfrak{s}$ を一般の scaling とする．$0 < \alpha, \beta < |\mathfrak{s}| < \alpha + \beta$ のとき，

$$\int_{\|y\|_{\mathfrak{s}} \le 1,\, \|x-y\|_{\mathfrak{s}} \le 1} \|y\|_{\mathfrak{s}}^{-\alpha}\|x-y\|_{\mathfrak{s}}^{-\beta}dy \lesssim \|x\|_{\mathfrak{s}}^{|\mathfrak{s}|-\alpha-\beta}$$

であることを示せ．

ところで，もっと複雑な decorated tree に対してこのような計算を行うには，次のグラフ表記が便利である．$\bullet$ は固定された変数 $x_1, x_2$ を，$*$ は積分されている変数を表す．矢印 $x \leftarrow y$ は関数 $P(x-y)$ を，辺 $x \!-\!\boxed{\alpha}\!-\! y$ は $O(\|x-y\|_{\mathfrak{s}}^{\alpha})$ の関数を表す．



さて，共分散関数の評価から，$n$ について一様に

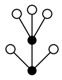
$\mathbb{E}[|(Q_t * :\boldsymbol{\Pi}^n$  $:)(x)|^2] \lesssim t^{-\frac{2}{2M}}$

となるため，命題6.1と同様の議論により，$\mathcal{C}^{-1-}_{\mathfrak{s},\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^4)$ での一様評価や収束が得られる．よって，

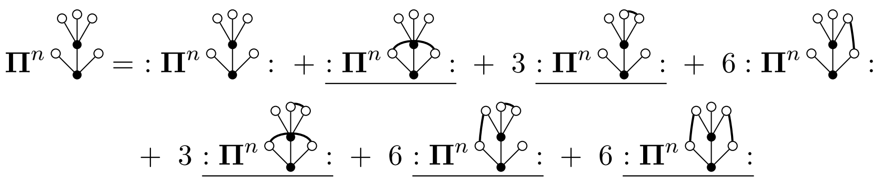
$$\hat{\boldsymbol{\Pi}}^n\tau := \boldsymbol{\Pi}^n\tau - a_n$$

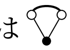
と定義すればよい．

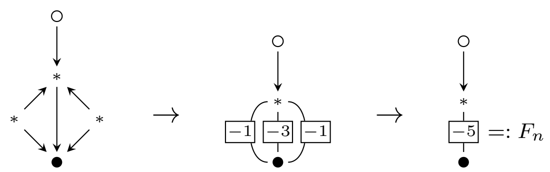
次に，もう少し複雑な



という decorated tree を考えよう．こちらもまず Wiener カオス展開すると



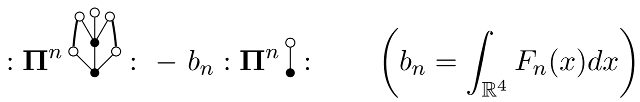
となる．○を繋ぐ曲線は，対応する $\xi_n$ が Feynman 図において組になっていることを表す．下線部が繰り込みを必要とする項である．まず，右辺第 2,3,5,6 項には  の形の積分が含まれているので，これらを取り除けばよい．一方，第 7 項はもう一工夫必要である．積分核の評価は



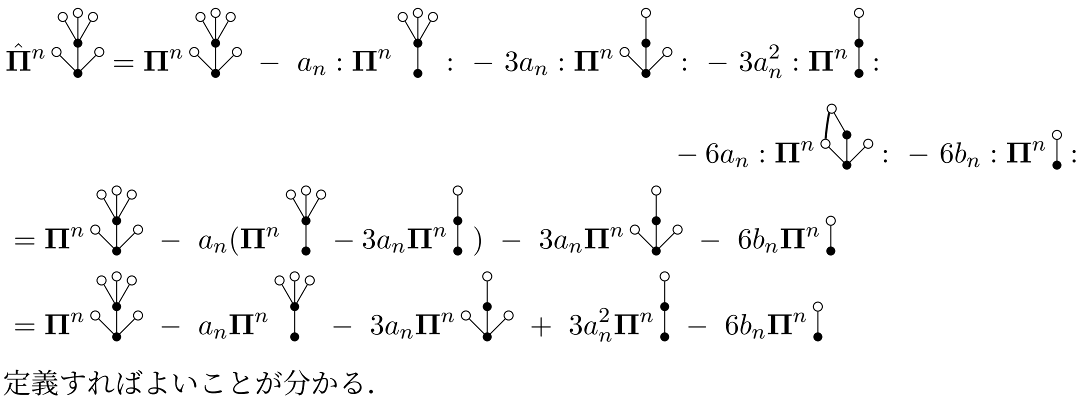
となるが，最後に現れた積分核 $F_n(x) = O(\|x\|_{\mathfrak{s}}^{-5})$ は一様に可積分ではないので，このままでは収束しない．そこで

$$F_n * P(x) - \left(\int_{\mathbb{R}^4} F_n(x)dx\right)P(x) = \int_{\mathbb{R}^4} F_n(x-y)\big(P(y)-P(x)\big)dx$$

という補正を行うことにする．$P$ の Lipschitz 評価を使えば，$F_n$ の発散を少し弱められるため，この補正した畳み込みは収束する (cf. [69, Lemma 10.16])．従って，



という繰り込みを考えればよい．以上をまとめると，



と定義すればよいことが分かる．

### 6.3 Model の変形

以上の考察により，$T$ 上の適当な線形変換によって $\hat{\mathbf{\Pi}}^n = \mathbf{\Pi}^n M^n$ と表される model を考えればよいことが分かる．どのような変換が許容されるかについては，[20, 23] において定義が与えられている．まず，Bruned [20] による帰納的定義を紹介する．

**定義 6.4.**
次の条件を満たす線形写像 $R : T \to T$ を **admissible renormalization map**（[20] では「admissible」，[9] では「preparation map」）という．

(1) $\bullet^k, \circ, I_p\tau$ の形の元 $\sigma \in \mathcal{B}$ に対して，$R\sigma = \sigma$ である．

(2) $R(\bullet^k\tau) = \bullet^k R\tau$ である．

(3) 任意の $\tau \in \mathcal{B}$ に対して，

$$R\tau = \tau + \sum_i \alpha_i \tau_i \qquad (\alpha_i \neq 0,\ \tau_i \in \mathcal{B},\ |\tau_i| > |\tau|,\ \|\tau_i\| < \|\tau\|)$$

と表すことができる．ここで，$\|(\tau, \mathfrak{t})\| := |\mathfrak{t}^{-1}\{1\}|$ は $\circ$ 型の頂点の個数を表す．

(4) $(R \otimes \mathrm{Id})\Delta = \Delta R$ である．

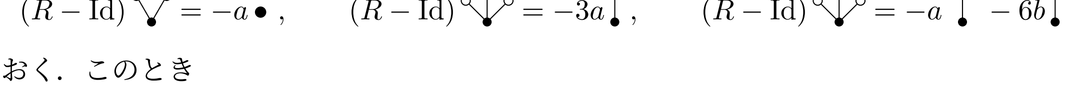
**問 17.**
(4) より，任意の $g \in G$ に対して $\Gamma_g R = R\Gamma_g$ であることを示せ．

**定理 6.5 ([20, Proposition 3.7]).**
任意の admissible renormalization map $R$ に対し，線形写像 $M, M^\circ : T \to T$ を次のように定義できる．

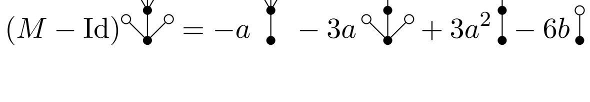
$$M = M^\circ R, \qquad M^\circ\sigma = \sigma \quad (\sigma \in \{\bullet^k, \circ\}),$$
$$M^\circ(\tau\sigma) = (M^\circ\tau)(M^\circ\sigma), \qquad M^\circ(I_p\tau) = I_p(M\tau).$$

具体的には，$R$ は root での tree product で発生する繰り込み，$M^\circ$ は root 以外での tree product で発生する繰り込みを表す．

**問 18.**
定数 $a, b$ を固定し，



とおく．このとき



となることを示せ．

**定理 6.6 ([69, Theorem 8.44], [20, Proposition 3.16]).**
$R$ を admissible renormalization map とする．Admissible interpretation map $\mathbf{\Pi} : T \to C^\infty(\mathbb{R}^4)$ に対し，$L(\mathbf{\Pi}) \in \mathscr{M}^\infty_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ ならば，$L(\mathbf{\Pi}M) \in \mathscr{M}^\infty_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ である．

次に，Bruned, Hairer, Zambotti [23] による直接的な定義を紹介する．

**定義 6.5.**
$\mathcal{B}$ によって生成される多項式環を $\hat{T}^- = \mathbb{R}[\mathcal{B}]$ と表す．グラフの disjoint union を $\hat{T}^-$ の積（**forest product** という）と見なし，空集合を $\hat{T}^-$ の単位元と見なす．代数準同型

$$D^- : \hat{T}^- \to \hat{T}^- \hat{\otimes} \hat{T}^-$$

を，任意の $(\tau, \mathfrak{t})^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{e}} \in \mathcal{B}$ に対して

$$D^-(\tau, \mathfrak{t})^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{e}} = \sum_{\varphi \in A^-(\tau)} \sum_{\mathfrak{n}_\varphi, \mathfrak{e}_{\partial\varphi}} \frac{1}{\mathfrak{e}_{\partial\varphi}!} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}_\varphi} (\varphi, \mathfrak{t}|_{N_\varphi})^{\mathfrak{n}_\varphi + \pi\mathfrak{e}_{\partial\varphi}}_{\mathfrak{e}} \otimes (\tau/\varphi, \mathfrak{t} \cdot \mathbf{1}_{N\tau \setminus N_\varphi})^{[\mathfrak{n} - \mathfrak{n}_\varphi]_\varphi}_{\mathfrak{e} + \mathfrak{e}_{\partial\varphi}} \tag{6.2}$$

と定義する．ここで，$A^-(\tau)$ は $\tau$ の部分グラフ全体からなる集合であり，空集合も含む．それ以外の記号の意味は，$\tau/\varphi$ が $\varphi$ の各連結成分を一点に潰すことを表す以外は (5.6) と同じである．

**定理 6.7 ([23, Corollary 6.37]).**
$\mathcal{B}_- := \{\tau \in \mathcal{B} ; |\tau| < 0\}$ によって生成される部分代数を $T^-$ と表し，$p_- : \hat{T}^- \to T^-$ を標準的な射影とする．線形写像 $\delta : T \to T^- \otimes T$ と代数準同型 $\delta^- : T^- \to T^- \otimes T^-$ を

$$\delta := (p_- \otimes \mathrm{Id}) D^-, \qquad \delta^- := (p_- \otimes p_-) D^-$$

と定義する．このとき，$(T^-, \delta^-)$ は Hopf 代数の構造をもち，$(T, \delta)$ は $T^-$ 上の**左余加群**の構造

$$(\delta^- \otimes \mathrm{Id})\delta = (\mathrm{Id} \otimes \delta)\delta$$

をもつ．従って，$T^-$ 上の指標群を $G^-$ と表すと，$G$ の $T$ への**右からの**作用が

$$M_\ell \tau := (\ell \otimes \mathrm{Id})\delta\tau \qquad (\ell \in G^-)$$

によって定まる．

**問 19.**
$\ell_1, \ell_2 \in G^-$ に対し，$M_{\ell_1} M_{\ell_2} = M_{\ell_2 * \ell_1}$ を示せ．

**定理 6.8 ([23, Theorem 6.16], [14, Proposition 27]).**
$G^-$ の部分群 $G^-_{\mathrm{ad}}$ を

$$G^-_{\mathrm{ad}} = \big\{\ell \in G^- \,;\, \tau \in \{\bullet^k \eta\ (k \neq 0),\, \circ,\, I_p\sigma\} \ \Rightarrow\ \ell(\tau) = 0\big\}$$

と定義する．$\ell \in G^-_{\mathrm{ad}}$ とすると，admissible interpretation map $\mathbf{\Pi} : T \to C^\infty(\mathbb{R}^4)$ に対し，$L(\mathbf{\Pi}) \in \mathscr{M}^\infty_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ ならば，$L(\mathbf{\Pi} M_\ell) \in \mathscr{M}^\infty_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ である．

(6.2) において，$A^-(\tau)$ を $A^r(\tau) = \{\emptyset\} \cup A(\tau)$ や $A^\circ(\tau) = A^-(\tau) \setminus A^r(\tau)$ に置き換えて得られる線形写像をそれぞれ $\delta^r, \delta^\circ : T \to T^- \otimes T$ と表す．各 $\ell \in G^-_{\mathrm{ad}}$ に対して

$$R = (\ell \otimes \mathrm{Id})\delta^r \tag{6.3}$$

とおくと，これは admissible renormalization であり，対応する写像 $M, M^\circ$ は

$$M^\circ = (\ell \otimes \mathrm{Id})\delta^\circ, \qquad M = (\ell \otimes \mathrm{Id})\delta$$

と表される ([20, Corollary 4.5])．従って， 定理 6.8 は定理 6.6 の特別な場合である．

## 6.4 BPHZ model

次の結果は，動的 $\phi^4_3$ 模型に限らず，正則性構造理論が適用可能なすべての SPDE (1.1) で成り立つ．また，確率場 $\xi$ は，**定常**（任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $\xi(\cdot) \overset{d}{=} \xi(\cdot + x)$）かつ，任意のテスト関数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\xi(\varphi)$ が**任意次数のモーメント**をもってさえいればよい．

**定理 6.9 ([23, Theorem 6.18]).**
$\xi$ を時空ホワイトノイズとし，近似列 $\xi_n = \xi * \rho_n$ に対する admissible interpretation map を $\mathbf{\Pi}^n$ とおく．このとき，**ランダムではない** $\ell^n \in G^-_{\mathrm{ad}}$ で，$\hat{\mathbf{\Pi}}^n = \mathbf{\Pi}^n M_{\ell^n}$ が

$$\mathbb{E}[(\hat{\mathbf{\Pi}}^n \tau)(x)] = 0 \qquad (\tau \in \mathcal{B}_-,\ x \in \mathbb{R}^4)$$

を満たすものがただ 1 つ存在する．$\hat{\mathbf{\Pi}}^n$ に対する admissible model $\hat{Z}^n = L(\hat{\mathbf{\Pi}}^n)$ を **BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmerman) model** という．

次の結果は，すべての $\tau \in \mathcal{B}_-$ に対する $\hat{\Pi}^n_x \tau$ の収束を地道に示すことで得られる．

**定理 6.10 ([69, Theorem 10.22]).**
$\mathscr{T}$ を動的 $\phi^4_3$ 模型に対応する正則性構造とする．時空ホワイトノイズの近似列 $\xi_n = \xi * \rho_n$ に対する BPHZ model $\hat{Z}^n$ は，$n \to \infty$ のとき，$\rho$ のとり方に依らない確率変数 $\hat{Z} : \Omega \to \mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ に確率収束する．

第 5 回の内容

- 一般の BPHZ model の収束
- Model の変形が方程式に及ぼす作用

### 6.5 一般の SPDE (1.1) への拡張

定理 6.10 と同様の結果を一般の SPDE (1.1) で得るには，基本的にはすべての $\tau \in \mathcal{B}_-$ に対して $\hat{\Pi}_x^n \tau$ の収束を示せばよい．しかし，臨界次元（定理 1.4）に近づくにつれてこのような $\tau$ は際限なく増えていくから，地道な計算には限界がある (cf. [87])．この章への補足として，BPHZ model の収束に関する一般的な結果を二つ紹介しよう．以下，$\mathscr{T} = (A, T = \langle \mathcal{B} \rangle, G)$ は方程式 (1.1) に対応する正則性構造とする．また，簡単のため $\xi$ は時空ホワイトノイズとするが，定常かつ任意次数のモーメントをもつ確率場（6.4 章参照）にも拡張可能である．

まず Chandra と Hairer [31] の結果を紹介する．彼らのアイディアは，6.2 章のような計算をすべてのグラフに一般化するというものであり，共分散関数の原点での発散の指数や，現れるグラフの次数をいかに上手く処理するかが鍵となる．

**定理 6.11 ([31, Theorem 2.15]).**
$\xi : \Omega \to \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha_0}(\mathbb{R}^{1+d})$ $(-|\mathfrak{s}| < \alpha_0 < -\frac{|\mathfrak{s}|}{2})$ を時空ホワイトノイズとする．$\xi_n = \xi * \rho_n$ の共分散関数 $C_n(x) = \mathbb{E}[\xi_n(x)\xi_n(0)]$ は，ある $\delta > 0$ に対して

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_+} \sup_{x \in \mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}} |x|^{-2\alpha_0 + \delta + |k|_{\mathfrak{s}}} |\partial^k C_n(x)| < \infty \qquad (k \in \mathbb{N}^{1+d})$$

を満たすとする．任意の $(\tau, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{n}} \in \mathcal{B}$ と，$|N_\sigma| \geq 2$ である任意の連結部分グラフ $\sigma \subset \tau$ に対して，次の条件が成り立つとする．

(1) $|(\sigma, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^0| > -\frac{|\mathfrak{s}|}{2}$ である．

(2) $N + \|(\sigma, \mathfrak{t})\|$ が偶数となる $N \in \mathbb{N}_+$ に対し，$|(\sigma, \mathfrak{t})_{\mathfrak{e}}^0| + (\alpha_0 + |\mathfrak{s}|)N > 0$ である．

このとき，$\xi_n$ に対する BPHZ model $\hat{Z}^n$ は，$n \to \infty$ のとき，$\rho$ のとり方に依らない確率変数 $\hat{Z} : \Omega \to \mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ に確率収束する．

次に Hairer と Steele [83] の結果を紹介する．彼らのアイディアは，[97] による**スペクトルギャップ**を用いた証明に基づいており，具体的なグラフの構造を用いる必要のない，帰納的な証明となっている．

まずいくつか用語を定義する．関数 $F : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d}) \to \mathbb{R}$ が**柱状 (cylindrical)** であるとは，適当な多項式増大程度の $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と，$\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{1+d})$ が存在して

$$F(\xi) = f(\langle \xi, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle \xi, \varphi_n \rangle) \qquad (\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+d}))$$

と表されることをいう．このような $F$ に対し，その Fréchet 微分を

$$[DF(\xi)](x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\langle \xi, \varphi_1 \rangle, \dots, \langle \xi, \varphi_n \rangle) \varphi_i(x)$$

で定める．

**定義 6.6.**
確率変数 $\xi : \Omega \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ が $s \in \mathbb{R}$ について**スペクトルギャップ不等式**を満たすとは，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の柱状関数 $F : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d}) \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{E}\big[|F(\xi) - \mathbb{E}[F(\xi)]|^2\big] \leq C\mathbb{E}\big[\|DF(\xi)\|_{H^s(\mathbb{R}^{1+d})}^2\big]$$

を満たすことをいう．

例えば，時空ホワイトノイズは $s = 0$ についてスペクトルギャップ不等式を満たす [120, 命題 1.9]．

**定理 6.12 ([83, Theorem 2.33]).**
確率変数 $\xi : \Omega \to \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}^{\alpha_0}(\mathbb{R}^{1+d})$ ($\alpha_0 = -\frac{|\mathfrak{s}|}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) は $\varepsilon$ についてスペクトルギャップ不等式を満たすとする．また，$|E_\tau| + \|\tau\| \geq 2$ である任意の $\tau \in \mathcal{B}$ に対して，$|\tau| > -\frac{|\mathfrak{s}|}{2}$ が成り立つとする．このとき，$\xi_n = \xi * \rho_n$ に対する BPHZ model $\hat{Z}^n$ は，$n \to \infty$ のとき，$\rho$ のとり方に依らない確率変数 $\hat{Z} : \Omega \to \mathscr{M}_{\mathrm{ad}}(\mathscr{T})$ に確率収束する．

スペクトルギャップ不等式を用いるアイディアを簡単に説明する．$\tau \in \mathcal{B}_-$ として，$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+d})$ 上の関数 $F(\xi) = Q_t * \hat{\mathbf{\Pi}}^n\tau$ を考える．BPHZ model の定義より $\mathbb{E}[F(\xi)] = 0$ であるため，$DF(\xi)$ の評価を考えればよい．テスト関数 $\eta$ をとり，方向微分

$$\langle DF(\xi), \eta\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\xi + \varepsilon\eta) - F(\xi)}{\varepsilon}$$

を考えると，これは $\tau$ の $\circ$ 型の頂点の 1 つを $\eta$ に置き換えた decorated tree の線形結合の形で書ける．つまり，$\xi$ の数が 1 つ少ない decorated tree の評価に帰着される．

# 7 方程式の繰り込み

$\hat{\mathbf{\Pi}}^n = \mathbf{\Pi}^n M^n$ が収束するような線形変換 $M^n$ の存在は分かった．この章では，対応する $\hat{\phi}^n = \mathcal{R}(\phi_0, \hat{\mathbf{\Pi}}^n)$ が満たす方程式が，元の方程式と $M^n$ の情報によってどのように書けるかを，Bailleul と Bruned [9] に基づいて解説する．

## 7.1 主定理

以下，$\mathscr{T} = (A, T = \langle\mathcal{B}\rangle, G)$ を方程式 (1.1) に対応する正則性構造とする．ただし $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ とする．まず，任意の $\tau \in \mathcal{B}$ は

$$\tau = \zeta^k \prod_{i=1}^n I_{p_i}(\tau_i) \qquad \begin{pmatrix} \zeta \in \{\bullet, \circ\},\ k \in \mathbb{N}^{1+d}, \\ n \in \mathbb{N},\ \tau_i \in \mathcal{B},\ p_i \in \mathbb{N}^{1+d} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

の形に，積の順序を除いて一意的に表されることに注意する．ただし $\circ^k = M(\bullet^k, \circ)$ である．

**定義 7.1.**
各 $\tau \in \mathcal{B}$ に対し，$S(\tau) \in \mathbb{N}_+$ を次のように定義する．

$$S(\zeta) = 1, \qquad S\Bigl(\zeta^k \prod_{j=1}^{m} I_{q_j}(\sigma_j)^{\beta_j}\Bigr) = k! \prod_{j=1}^{m} \beta_j! S(\sigma_j)^{\beta_j}.$$

ただし，第 2 式の引数は (7.1) において重複する因数をまとめたものである．すなわち，$i \neq j$ ならば $(q_i, \sigma_i) \neq (q_j, \sigma_j)$ である．また，各 $\tau \in \mathcal{B}$ に対し，変数 $v = (v_p)_{p \in \mathbb{N}^{1+d}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{1+d}}$ についての関数 $\Upsilon[\tau](v)$ を

$$\Upsilon[\bullet](v) = f(v_0, v_{e_1}, \ldots, v_{e_d}), \qquad \Upsilon[\circ](v) = g(v_0),$$
$$\Upsilon\left[\zeta^k \prod_{i=1}^{n} I_{p_i}(\tau_i)\right] = \left(D^k \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial v_{p_i}}\right) \Upsilon[\zeta] \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \Upsilon[\tau_i]\right)$$

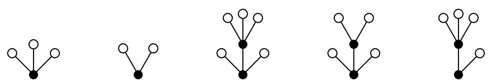
と定義する．ただし，$D^k := \prod_{i=0}^{d} D_i^{k_i}$ は方向微分 $D_i = \sum_{p \in \mathbb{N}^{1+d}} v_{p+e_i} \frac{\partial}{\partial v_p}$ によって定義される微分作用素である．

方程式 (1.1) に対する modelled distribution の意味での解写像を $\mathbb{S} : (u_0, Z) \mapsto U$ とする．$\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^{1+d})$ に対する canonical model を $Z^\xi = L(\mathbf{\Pi}^\xi)$ とし，$\ell \in G_{\mathrm{ad}}^-$ による変形を $\hat{Z}^\xi = L(\mathbf{\Pi}^\xi M_\ell)$ と表す．

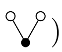
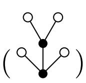
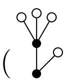
**定理 7.1 ([21, Theorem 2.21], [9, Theorem 9]).**
各 $\ell \in G_{\mathrm{ad}}^-$ に対し，$\hat{u} = \mathcal{R}\mathbb{S}(u_0, \hat{Z}^\xi)$ は次式を満たす．

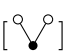
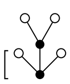
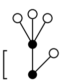
$$(\partial_t - \Delta)\hat{u} = f(\hat{u}, \nabla\hat{u}) + g(\hat{u})\xi + \sum_{\tau \in \mathcal{B}_-} \frac{\ell(\tau)}{S(\tau)} \Upsilon[\tau]\bigl((\partial^p \hat{u})_{p \in \mathbb{N}^{1+d}}\bigr). \tag{7.2}$$

**例 7.1.**
動的 $\phi_3^4$ 模型の場合，$\mathcal{B}_-$ の元は (5.5) の 10 個となる．ここで，$\ell \in G_{\mathrm{ad}}^-$ によって $\ell(\tau) = 0$ となるものを除くと，考えるべき元は

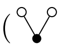
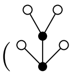
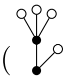


のみとなる．さらに，$\xi$ は平均 0 の Gauss 確率場だから，$\|\tau\|$ が奇数の $\tau$ に対しては $\mathbb{E}[\mathbf{\Pi}^\xi \tau] = 0$ であるため，BPHZ model の定義においては $\ell(\tau) = 0$ とすればよい．よって $\|\tau\|$ が偶数の $\tau$ のみ考えればよい．$\Upsilon[\bullet](\phi) = -\phi_0^3$, $\Upsilon[\circ] = 1$ として計算すると

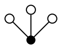
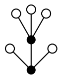
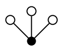
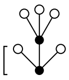
$S($  $) = 2,$ 　 $S($  $) = 4,$ 　 $S($  $) = 6,$

$\Upsilon[$  $] = -6\phi_0,$ 　 $\Upsilon[$  $] = 36\phi_0,$ 　 $\Upsilon[$  $] = 36\phi_0,$

となるから，式 (7.2) は

$$(\partial_t-\Delta)\hat{\phi}=-\hat{\phi}^3+\xi-\{3\ell($$  $$)+9\ell($$  $$)+6\ell($$  $$)\}\hat{\phi}$$

となる．

**問 20.**
$S($$)$, $S($$)$, $\Upsilon[$$]$, $\Upsilon[$$]$ を求めよ．

## 7.2　積分方程式の場合

以下，定理 7.1 の証明の概略を述べるが，簡単のため 2 章や 3 章で扱った積分方程式

$$X_t=x+\int_0^t f(X_s)dB_s \tag{7.3}$$

を考えることにする．ただし $d=e=1$ とする．対応する modelled distribution の方程式は

$$\mathbb{X}=\left(x+\int_0^{\cdot} f(\mathbb{X})d\mathbb{B}\right)\bullet+\pi_{<\gamma}I\big(f(\mathbb{X})\circ\big) \tag{7.4}$$

である．任意の branched rough path $\mathbb{B}$ に対し，(7.4) はただ 1 つの解 $\mathbb{X}\in\mathcal{D}^{n\alpha}_{\mathbb{B}}(\mathbb{R};P)$ ($n\alpha\le 1<(n+1)\alpha$) をもつ．$B\in C_b^\infty(\mathbb{R})$ に対する canonical model を $Z=L(\mathbf{\Pi}^B)$ とし，admissible renormalization map $R:T(:=H\oplus W)\to T$ による変形を $\hat{Z}=L(\mathbf{\Pi}^BM)$ と表す．また，$T$ 上の内積 $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ を

$$\langle\!\langle\tau,\sigma\rangle\!\rangle=\mathbf{1}_{\tau=\sigma}S(\tau)\qquad(\tau,\sigma\in B)$$

によって定義し，$R$ の双対写像 $R^*:T\to T$ を

$$\langle\!\langle R^*\tau,\sigma\rangle\!\rangle=\langle\!\langle\tau,R\sigma\rangle\!\rangle$$

によって定義する．さらに，線形写像 $\Upsilon:T\to C^\infty(\mathbb{R})$ を

$$\Upsilon[\bullet]=0,\qquad\Upsilon[\circ]=f,\qquad\Upsilon\left[\zeta\prod_{i=1}^n I(\tau_i)\right]=\Upsilon[\zeta]^{(n)}\prod_{i=1}^n\Upsilon[\tau_i]\quad(\zeta\in\{\bullet,\circ\}) \tag{7.5}$$

と定義する．

**定理 7.2 ([9, Theorem 9]).**
$\hat{Z}$ に対する (7.4) の解 $\hat{\mathbb{X}}\in\mathcal{D}^{n\alpha}_{\hat{Z}}(\mathbb{R};P)$ の $\bullet$ 成分 $\hat{X}$ は，方程式

$$\hat{X}_t=x+\int_0^t\Upsilon[R^*\circ](\hat{X}_s)dB_s+\int_0^t\Upsilon[R^*\bullet](\hat{X}_s)ds$$

を満たす．特に，$R$ が (6.3) の形の admissible renormalization map であれば

$$R^*\circ=\circ,\qquad R^*\bullet=\bullet+\sum_{\tau\in B_-}\frac{\ell(\tau)}{S(\tau)}\tau$$

となる．ただし，$B_-:=\{\tau\in B_\circ\,;\,|\tau|<0\}$ である．

## 7.3 Butcher 級数

**命題 7.3 ([58, Theorem 5.1]).**
方程式 (7.4) の解 $\mathbb{X} \in \mathcal{D}^{n\alpha}(\mathbb{R}; P)$ は

$$\mathbb{X}_t = \pi_{<n\alpha}\left(X_t \bullet + \sum_{\tau \in B_\circ} \frac{1}{S(\tau)} \Upsilon[\tau](X_t) I(\tau)\right) \tag{7.6}$$

という表示をもつ.（このような級数を **Butcher 級数**という.）

**証明** 方程式 (7.4) の解を $\mathbb{X} = \pi_{<n\alpha}\big(X \bullet + \sum_{\tau \in B_\circ} X^\tau I(\tau)\big)$ とおく．$f(\mathbb{X})$ の定義（命題 3.4）より

$$\begin{aligned} f(\mathbb{X}) &= \pi_{<n\alpha}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(X)(\mathbb{X} - X\bullet)^k\right) \\ &= \pi_{<n\alpha}\left(\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(X) \sum_{\tau_1,\dots,\tau_k \in B_\circ} X^{\tau_1} \cdots X^{\tau_k} I(\tau_1) \cdots I(\tau_k)\right) \end{aligned}$$

となるから，$\tau = \circ \prod_{j=1}^m I(\sigma_j)^{\beta_j}$ $(i \neq j \Rightarrow \sigma_i \neq \sigma_j)$ の形の $\tau$ $(|\tau| < n\alpha)$ に対する $X^\tau$ は

$$X^\tau = \pi_\tau\big(f(\mathbb{X}) \circ\big) = \frac{f^{(\beta_1 + \cdots + \beta_m)}(X)}{(\beta_1 + \cdots + \beta_m)!} \frac{(\beta_1 + \cdots + \beta_m)!}{\beta_1! \cdots \beta_m!} (X^{\sigma_1})^{\beta_1} \cdots (X^{\sigma_m})^{\beta_m}$$

を満たす．従って，各 $i$ に対して $X^{\sigma_i} = \frac{\Upsilon[\sigma_i]}{S(\sigma_i)}$ であれば,

$$X^\tau = \frac{f^{(\beta_1 + \cdots + \beta_m)}(X)}{\beta_1! S(\sigma_1)^{\beta_1} \cdots \beta_m! S(\sigma_m)^{\beta_m}} \Upsilon[\sigma_1]^{\beta_1} \cdots \Upsilon[\sigma_m]^{\beta_m} = \frac{1}{S(\tau)} \Upsilon[\tau](X)$$

も成り立つ. ■

## 7.4 Pre-Lie 代数

**定義 7.2.**
$A$ を線形空間，$\triangleright : A \times A \to A$ を双線形写像とする．任意の $a, b, c \in A$ に対して

$$a \triangleright (b \triangleright c) - (a \triangleright b) \triangleright c = b \triangleright (a \triangleright c) - (b \triangleright a) \triangleright c$$

が成り立つとき，$(A, \triangleright)$ を **pre-Lie 代数**という.

**問 21.**
$(A, \triangleright)$ を pre-Lie 代数とする．$[a, b] := a \triangleright b - b \triangleright a$ とおくと，Jacobi の恒等式

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

が成り立つことを示せ.

**例 7.2.**

(1) $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対し

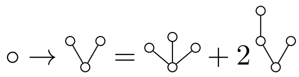
$$f \triangleright g := fg'$$

とおくと，$(C^\infty(\mathbb{R}), \triangleright)$ は pre-Lie 代数である．

(2) 各 $\tau, \sigma \in B_\circ$ に対し，$\tau$ の頂点 $v$ と $\sigma$ の root を新たな 1 本の辺で繋ぎ合わせて得られる tree を $\sigma \to^v \tau$ と表す．さらに，双線形写像 $\to: W \times W \to W$ を

$$\sigma \to \tau = \sum_{v \in N_\tau} \sigma \to^v \tau$$

によって定義する．例えば



である．このとき，$(W, \to)$ は pre-Lie 代数である．

**命題 7.4.**
線形写像 $\Upsilon : W \to C^\infty(\mathbb{R})$ は pre-Lie 準同型である．すなわち

$$\Upsilon[\sigma \to \tau] = \Upsilon[\sigma] \triangleright \Upsilon[\tau] \qquad (\tau, \sigma \in B_\circ)$$

が成り立つ．

**証明** 簡単のため $\circ \prod_{i=1}^n I(\eta_i) = [\eta_1 \cdots \eta_n]_\circ$ と表す．$\Upsilon[\sigma \to \eta_i] = \Upsilon[\sigma]\Upsilon[\eta_i]'$ が成り立つと仮定すると，

$$\begin{aligned}
\Upsilon\big[\sigma \to [\eta_1 \cdots \eta_n]_\circ\big] &= \Upsilon\Bigg[[\sigma\eta_1 \cdots \eta_n]_\circ + \sum_{i=1}^n [\eta_1 \cdots (\sigma \to \eta_i) \cdots \eta_n]_\circ\Bigg] \\
&= f^{(n+1)}\Upsilon[\sigma]\Upsilon[\eta_1] \cdots \Upsilon[\eta_n] + f^{(n)} \sum_{i=1}^n \Upsilon[\eta_1] \cdots \Upsilon[\sigma \to \eta_i] \cdots \Upsilon[\eta_n] \\
&= f^{(n+1)}\Upsilon[\sigma]\Upsilon[\eta_1] \cdots \Upsilon[\eta_n] + f^{(n)} \sum_{i=1}^n \Upsilon[\eta_1] \cdots \Upsilon[\sigma]\Upsilon[\eta_i]' \cdots \Upsilon[\eta_n] \\
&= \Upsilon[\sigma]\big(f^{(n)}\Upsilon[\eta_1] \cdots \Upsilon[\eta_n]\big)' \\
&= \Upsilon[\sigma]\big(\Upsilon\big[[\eta_1 \cdots \eta_n]_\circ\big]\big)'
\end{aligned}$$

となる．よって，$|N_\tau|$ に関する帰納法により命題が示される． ■

### 7.5 Guin-Oudom の積

Pre-Lie 構造 $\triangleright$ は結合法則を満たさないが，Guin と Oudom [67] は pre-Lie 代数から結合法則を満たす積 $\star$ を得る一般的な方法を示した．この方法を Pre-Lie 代数 $(W, \to)$ に適用すると次のようになる．以下，簡単のため $\prod_{i=1}^n I(\eta_i) = [\eta_1 \cdots \eta_n]_\bullet$ と表す．

**命題 7.5.**
双線形写像 $\star : H \times T \to T$ を，$\bullet \star \tau = \tau$ と

$$[\sigma_1 \cdots \sigma_n]_\bullet \star \tau = \sum_{v_1,\dots,v_n \in N_\tau} \sigma_1 \to^{v_1} (\sigma_2 \to^{v_2} (\cdots (\sigma_n \to^{v_n} \tau) \cdots))$$

によって定義する．$\sigma_1, \dots, \sigma_n$ の順序は自由に入れ替えられる．このとき，$\star$ は結合法則

$$\tau \star (\sigma \star \eta) = (\tau \star \sigma) \star \eta \qquad (\tau, \sigma \in B_\bullet,\ \eta \in B)$$

を満たす．

実は，この $\star$ は Connes-Kreimer の余積 $\Delta$ の双対になっている．

**定理 7.6.**
$T \otimes T$ 上の内積を

$$\langle\!\langle \tau_1 \otimes \sigma_1, \tau_2 \otimes \sigma_2 \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tau_1, \tau_2 \rangle\!\rangle \langle\!\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle\!\rangle \qquad (\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2 \in B)$$

と定義する．このとき，任意の $\tau, \eta \in B$, $\sigma \in B_\bullet$ に対して

$$\langle\!\langle \sigma \star \tau, \eta \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tau \otimes \sigma, \Delta\eta \rangle\!\rangle \tag{7.7}$$

が成立する．

**問 22.**
$\tau = [\tau_1 \cdots \tau_n]_\zeta$, $\sigma = [\sigma_1 \cdots \sigma_m]_{\zeta'}$ $(\zeta, \zeta' \in \{\bullet, \circ\})$ とおく．等式

$$\langle\!\langle \tau, \sigma \rangle\!\rangle = \mathbf{1}_{\zeta=\zeta'} \mathbf{1}_{n=m} \sum_{s \in S_n} \prod_{i=1}^n \langle\!\langle \tau_i, \sigma_{s(i)} \rangle\!\rangle \tag{7.8}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$S_n$ は $\{1, \dots, n\}$ の置換全体からなる群である．

**証明** $\sigma = \bullet$ では成り立っているから，$\sigma = [\sigma_1 \cdots \sigma_n]_\bullet$ の場合を考える．

(1) $n = 1$ の場合：$\tau = [\tau_1 \cdots \tau_m]_\zeta$, $\eta = [\eta_1 \cdots \eta_\ell]_\zeta$ $(\zeta \in \{\bullet, \circ\})$ とおく．$\star$ の定義より

$$\sigma \star \tau = \sigma_1 \to \tau = [\sigma_1 \tau_1 \cdots \tau_m]_\zeta + \sum_{i=1}^m [\tau_1 \cdots (\sigma_1 \to \tau_i) \cdots \tau_n]_\zeta$$

であるから，等式 (7.8) より

$$\langle\!\langle \sigma \star \tau, \eta \rangle\!\rangle = \begin{cases} \sum_{s \in S_{m+1}} \langle\!\langle \sigma_1, \eta_{s(m+1)} \rangle\!\rangle \prod_{i=1}^m \langle\!\langle \tau_i, \eta_{s(i)} \rangle\!\rangle & (\ell = m+1) \\ \sum_{i=1}^m \sum_{s \in S_m} \langle\!\langle \sigma_1 \to \tau_i, \eta_{s(i)} \rangle\!\rangle \prod_{j \neq i} \langle\!\langle \tau_j, \eta_{s(j)} \rangle\!\rangle & (\ell = m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7.9}$$

となる．一方，$\Delta\eta$ の展開において，テンソル積の右側の成分が $I(\cdot)$ の形にならないものを無視すると，

$$\Delta\eta = \sum_{j=1}^{\ell}[\eta_1\cdots\eta_{j-1}\eta_{j+1}\cdots\eta_\ell]_\zeta \otimes I(\eta_j) + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{\rho_j\in A(\eta_j)}[\eta_1\cdots\rho_j\cdots\eta_\ell]\otimes(\eta_j/\rho_j) + \cdots$$

と展開できるため，

$$\langle\!\langle \tau\otimes\sigma, \Delta\eta\rangle\!\rangle$$

$$= \begin{cases} \sum_{s\in S_{m+1}}\langle\!\langle \sigma_1, \eta_{s(m+1)}\rangle\!\rangle \prod_{i=1}^{m}\langle\!\langle \tau_i, \eta_{s(i)}\rangle\!\rangle & (\ell = m+1) \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{s\in S_m}\sum_{\rho_{s(i)}\in A(\eta_{s(i)})}\langle\!\langle \sigma, \eta_{s(i)}/\rho_{s(i)}\rangle\!\rangle\langle\!\langle \tau_i, \rho_{s(i)}\rangle\!\rangle \prod_{j\neq i}\langle\!\langle \tau_j, \eta_{s(j)}\rangle\!\rangle & (\ell = m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7.10}$$

となる．ここで，$\langle\!\langle \sigma_1\to\tau_i, \eta_{s(i)}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \tau_i\otimes I(\sigma_1), \Delta\eta_{s(i)}\rangle\!\rangle$ を仮定すれば (7.9) と (7.10) は等しくなるため，$|N_\tau|$ に関する帰納法により，$n=1$ の場合の等式 (7.7) が示される．

(2) $n\geq 2$ の場合：$\sigma' = [\sigma_1\cdots\sigma_{n-1}]_\bullet$ とおく．$\star$ の定義より

$$I(\sigma_n)\star\sigma' = \sigma + \sum_{i=1}^{n-1}[\sigma_1\cdots(\sigma_n\to\sigma_i)\cdots\sigma_{n-1}]_\bullet$$

であるから，頂点から出る辺の本数が $n-1$ 以下の $\sigma$ に対して (7.7) が正しければ，

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \sigma\star\tau, \eta\rangle\!\rangle &= \Big\langle\!\!\Big\langle I(\sigma_n)\star(\sigma'\star\tau), \eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\Big\langle\!\!\Big\langle [\sigma_1\cdots(\sigma_n\to\sigma_i)\cdots\sigma_{n-1}]_\bullet\star\tau, \eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle \\ &= \Big\langle\!\!\Big\langle (\sigma'\star\tau)\otimes I(\sigma_1), \Delta\eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle - \sum_{i=1}^{n-1}\Big\langle\!\!\Big\langle \tau\otimes[\sigma_1\cdots(\sigma_n\to\sigma_i)\cdots\sigma_{n-1}]_\bullet, \Delta\eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle \\ &= \Big\langle\!\!\Big\langle (\sigma'\star\tau)\otimes I(\sigma_1), \Delta\eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle - \Big\langle\!\!\Big\langle \tau\otimes(I(\sigma_1)\star\sigma'), \Delta\eta\Big\rangle\!\!\Big\rangle + \langle\!\langle \tau\otimes\sigma, \Delta\eta\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

となる．最後の式の第 1,2 項を変形すると

$$\begin{aligned}\langle\!\langle (\sigma'\star\tau)\otimes I(\sigma_1), \Delta\eta\rangle\!\rangle &= \sum_{\rho\in A(\eta)}\langle\!\langle \sigma'\star\tau, \rho\rangle\!\rangle\langle\!\langle I(\sigma_1), \eta/\rho\rangle\!\rangle \\ &= \sum_{\rho\in A(\eta)}\langle\!\langle \tau\otimes\sigma', \Delta\rho\rangle\!\rangle\langle\!\langle I(\sigma_1), \eta/\rho\rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \tau\otimes\sigma'\otimes I(\sigma_1), (\Delta\otimes\mathrm{Id})\Delta\eta\rangle\!\rangle, \\ \langle\!\langle \tau\otimes(I(\sigma_1)\star\sigma'), \Delta\eta\rangle\!\rangle &= \sum_{\rho\in A(\eta)}\langle\!\langle \tau, \rho\rangle\!\rangle\langle\!\langle I(\sigma_1)\star\sigma', \eta/\rho\rangle\!\rangle \\ &= \sum_{\rho\in A(\eta)}\langle\!\langle \tau, \rho\rangle\!\rangle\langle\!\langle \sigma'\otimes I(\sigma_1), \Delta(\eta/\rho)\rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \tau\otimes\sigma'\otimes I(\sigma_1), (\mathrm{Id}\otimes\Delta)\Delta\eta\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

となるから，$\Delta$ の余結合則より両者は等しい．従って，$n$ に関する帰納法により (7.7) が示される． ■

**命題 7.7.**
任意の $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in B_\circ$ と $\tau \in B$ に対し，等式

$$\Upsilon\big[[\sigma_1 \cdots \sigma_n]_\bullet \star \tau\big] = \Upsilon[\tau]^{(n)} \prod_{i=1}^{n} \Upsilon[\sigma_i] \tag{7.11}$$

が成り立つ．

**証明** $|N_\tau|$ に関する帰納法で示す．$\tau \in \{\bullet, \circ\}$ のときは $\Upsilon$ の定義より明らかであるから，$\tau = [\tau_1 \cdots \tau_m]_\zeta$ の場合を考える．$\star$ の定義より

$$[\sigma_1 \cdots \sigma_n]_\bullet \star [\tau_1 \cdots \tau_m]_\zeta = \sum_{I_0 \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m = \{1,\ldots,n\}} \Bigg[\prod_{i \in I_0} \sigma_i \cdot \prod_{j=1}^{m} \bigg(\Big[\prod_{i \in I_j} \sigma_i\Big]_\bullet \star \tau_j\bigg)\Bigg]_\zeta$$

となるから，$\tau_1, \ldots, \tau_m$ に対して等式 (7.11) が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
&\Upsilon\big[[\sigma_1 \cdots \sigma_n]_\bullet \star [\tau_1 \cdots \tau_m]_\zeta\big] \\
&= \sum_{I_0 \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m = \{1,\ldots,n\}} \Upsilon[\zeta]^{(|I_0|+m)} \prod_{i \in I_0} \Upsilon[\sigma_i] \prod_{j=1}^{m} \Upsilon\bigg[\Big[\prod_{i \in I_j} \sigma_i\Big]_\bullet \star \tau_j\bigg] \\
&= \sum_{I_0 \sqcup I_1 \sqcup \cdots \sqcup I_m = \{1,\ldots,n\}} \Upsilon[\zeta]^{(|I_0|+m)} \Upsilon[\tau_1]^{(|I_1|)} \cdots \Upsilon[\tau_m]^{(|I_m|)} \Upsilon[\sigma_1] \cdots \Upsilon[\sigma_n] \\
&= \sum_{n_0+n_1+\cdots+n_m=n} \frac{n!}{n_0! n_1! \cdots n_m!} \Upsilon[\zeta]^{(n_0+m)} \Upsilon[\tau_1]^{(n_1)} \cdots \Upsilon[\tau_m]^{(n_m)} \Upsilon[\sigma_1] \cdots \Upsilon[\sigma_n] \\
&= \big(\Upsilon[\zeta]^{(m)} \Upsilon[\tau_1] \cdots \Upsilon[\tau_m]\big)^{(n)} \Upsilon[\sigma_1] \cdots \Upsilon[\sigma_n] \\
&= \Upsilon[\tau]^{(n)} \Upsilon[\sigma_1] \cdots \Upsilon[\sigma_n]
\end{aligned}$$

となる．よって $\tau$ に対しても等式 (7.11) が成り立つ． ■

## 7.6 定理 7.2 の証明の概略

次の性質は，定義 6.4 (4) の性質と，定理 7.6 から直ちに得られる．

**補題 7.8.**
$R$ を admissible renormalization map とする．任意の $\tau \in B$, $\sigma \in B_\bullet$ に対して

$$R^*(\sigma \star \tau) = \sigma \star (R^* \tau)$$

が成り立つ．

**証明 (定理 7.2)** $\hat{X}$ は

$$\hat{X}_t = x + \int_0^t \hat{\mathcal{R}}\big(f(\mathbb{X}) \circ\big)(s) ds$$

を満たす．ここで，$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X})\circ$ とおく．$B \in C^\infty(\mathbb{R})$ より，$\hat{\mathcal{R}}\mathbb{Y}(t) = (\hat{\Pi}_t \mathbb{Y}_t)(t)$ であるため ([20, Proposition 3.17])，

$$(\hat{\mathcal{R}}\mathbb{Y})(t) = (\Pi_t M \mathbb{Y}_t)(t) = (\Pi_t M^\circ R \mathbb{Y}_t)(t)$$

となる．$\Pi_t$ や $M^\circ$ は tree product と可換になるように定義しているから，$R\mathbb{Y}_t$ の成分表示を考えればよい．まず，Butcher 級数の式 (7.6) から，任意の $\tau \in W_{<(n+1)\alpha-1}$ に対し

$$\langle\!\langle \mathbb{Y}, \tau \rangle\!\rangle = \Upsilon[\tau](\hat{X})$$

が成り立つことに注意する．また $\tau \in B_\bullet$ に対しては $\Upsilon[\tau] = 0$ であるから，この式は結局すべての $\tau \in T_{<(n+1)\alpha-1}$ に対して成り立つ．また $R$ の性質より $(R^* - \mathrm{Id})(T_\beta) \subset T_{<\beta}$ であるから，すべての $\tau \in T_{<(n+1)\alpha-1}$ に対して

$$\langle\!\langle R\mathbb{Y}, \tau \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathbb{Y}, R^*\tau \rangle\!\rangle = \Upsilon[R^*\tau](\hat{X})$$

が成り立つ．よって

$$R\mathbb{Y} = \sum_{\tau \in B,\, |\tau| < (n+1)\alpha - 1} \frac{1}{S(\tau)} \Upsilon[R^*\tau](\hat{X})\tau + \cdots \tag{7.12}$$

と表せる．省略した $\cdots$ の項は $(\Pi_t M^\circ(\cdot))(t)$ に代入すると $0$ となるから，無視してよい．さらに，命題 7.7 と補題 7.8 より，$\tau = [\tau_1 \cdots \tau_n]_\zeta = [\tau_1 \cdots \tau_n]_\bullet \star \zeta$ に対して

$$\Upsilon[R^*\tau] = \Upsilon\big[[\tau_1 \cdots \tau_n]_\bullet \star R^*\zeta\big] = \Upsilon[R^*\zeta]^{(n)} \Upsilon[\tau_1] \cdots \Upsilon[\tau_n]$$

となるから，Butcher 級数の式 (7.6) を示すときの計算を逆に辿ることにより，

$$R\mathbb{Y} = \Upsilon[R^*\circ](\mathbb{X}) \circ + \Upsilon[R^*\bullet](\mathbb{X}) + \cdots$$

と表せることが分かる．$\Pi_x$ や $M^\circ$ が積と可換であることと，$\mathbb{X} \in \mathcal{D}^{n\alpha}(\mathbb{R}; P)$ に対しては $M^\circ \mathbb{X} = M\mathbb{X}$ であることから

$$\begin{aligned}
(\Pi_t M^\circ R \mathbb{Y}_t)(t) &= \sum_{\zeta \in \{\circ, \bullet\}} \big(\Pi_t \Upsilon[R^*\zeta](M^\circ \mathbb{X}_t)\big)(t)(\Pi_t\zeta)(t) \\
&= \sum_{\zeta \in \{\circ, \bullet\}} \Upsilon[R^*\zeta]\big(\Pi_t M^\circ \mathbb{X}_t(t)\big)(\Pi_t\zeta)(t) \\
&= \sum_{\zeta \in \{\circ, \bullet\}} \Upsilon[R^*\zeta](\hat{X}_t)(\Pi_t\zeta)(t) \\
&= \Upsilon[R^*\circ](\hat{X}_t)\dot{B}_t + \Upsilon[R^*\bullet](\hat{X}_t)
\end{aligned}$$

を得る． ■

**注意 7.3.**
$R$ が (6.3) の形の admissible renormalization map の場合は，$R^*\tau = \tau$ $(\tau \in B_\circ)$ となるため，証明はずっと簡単になる．しかし，一般の SPDE(1.1) ではこの性質は必ずしも成り立たない．

# 参考文献


[1] M. Aizenman, Geometric analysis of $\phi^4$ fields and Ising models. I, II, Comm. Math. Phys. **86** (1982), 1–48.

[2] M. Aizenman and H. Duminil-Copin, Marginal triviality of the scaling limits of critical 4D Ising and $\phi_4^4$ models, Ann. of Math. **194** (2021), 163–235.

[3] S. Albeverio, F.C. De Vecchi and M. Gubinelli, The elliptic stochastic quantization of some two dimensional Euclidean QFTs, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **57** (2021), 2372–2414.

[4] S. Albeverio and S. Kusuoka, The invariant measure and the flow associated to the $\Phi_3^4$-quantum field model, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **20** (2020), 1359–1427.

[5] S. Albeverio and S. Kusuoka, Construction of a non-Gaussian and rotation-invariant $\Phi^4$-measure and associated flow on $\mathbb{R}^3$ through stochastic quantization, arXiv:2102.08040.

[6] R. Allez and K. Chouk, The continuous Anderson hamiltonian in dimension two, arXiv:1511.02718.

[7] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin, Fourier analysis and nonlinear partial differential equations, Springer, Heidelberg (2011).

[8] I. Bailleul and F. Bernicot, High order paracontrolled calculus. Forum Math. Sigma **7** (2019), e44, 94 pp.

[9] I. Bailleul and Y. Bruned, Renormalised singular stochastic PDEs, arXiv:2101.11949.

[10] I. Bailleul, N. V. Dang, L. Ferdinand, and T. D. Tô, $\Phi_3^4$ measures on compact Riemannian 3-manifolds arXiv:2304.10185.

[11] I. Bailleul, A. Debussche, and M. Hofmanová, Quasilinear generalized parabolic Anderson model equation. Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **7** (2019), 40–63.

[12] I. Bailleul and M. Hoshino, Paracontrolled calculus and regularity structures I, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), 553–595.

[13] I. Bailleul and M. Hoshino, Paracontrolled calculus and regularity structures II, J. Éc. polytech. Math. **8** (2021), 1275–1328.

[14] I. Bailleul and M. Hoshino, A tourist's guide to regularity structures and singular stochastic PDEs, arXiv:2006.03524.

[15] I. Bailleul, M. Hoshino, and S. Kusuoka, Regularity structures for quasilinear singular SPDEs, arXiv:2209.05025.

[16] I. Bailleul and A. Mouzard, Paracontrolled calculus for quasilinear singular PDEs, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **11** (2023), 599–650.

[17] N. Barashkov and M. Gubinelli, A variational method for $\Phi^4_3$, Duke Math. J. **169** (2020), 3339–3415.

[18] L. Bertini and G. Giacomin, Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems, Comm. Math. Phys. **183** (1997), 571–607.

[19] L. Broux and D. Lee, Besov reconstruction, Potential Anal (2022). https://doi.org/10.1007/s11118-022-10028-7

[20] Y. Bruned, Recursive formulae in regularity structures, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **6** (2018), 525–564.

[21] Y. Bruned, A. Chandra, I. Chevyrev, and M. Hairer, Renormalising SPDEs in regularity structures. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **23** (2021), 869–947.

[22] Y. Bruned, F. Gabriel, M. Hairer, and L. Zambotti, Geometric stochastic heat equations, J. Amer. Math. Soc. **35** (2022), 1–80.

[23] Y. Bruned, M. Hairer, and L. Zambotti, Algebraic renormalisation of regularity structures, Invent. Math. **215** (2019), 1039–1156.

[24] G. Cannizzaro and J. Kiedrowski, Stationary stochastic Navier-Stokes on the plane at and above criticality, Stoch PDE: Anal Comp (2023). https://doi.org/10.1007/s40072-022-00283-5

[25] G. Cannizzaro, M. Gubinelli, and F. Toninelli, Gaussian Fluctuations for the stochastic Burgers equation in dimension $d \geq 2$, arXiv:2304.05730.

[26] F. Caravenna, R. Sun, N. Zygouras, The two-dimensional KPZ equation in the entire subcritical regime, Ann. Prob. **48** (2020), 1086–1127.

[27] F. Caravenna and L. Zambotti, Hairer's reconstruction theorem without regularity structures, EMS Surv. Math. Sci. **7** (2020), 207–251.

[28] R. Catellier and K. Chouk, Paracontrolled distributions and the 3-dimensional stochastic quantization equation, Ann. Probab. **46** (2018), 2621–2679.

[29] A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, and H. Shen, Langevin dynamic for the 2D Yang-Mills measure, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **136** (2022), 1–147.

[30] A. Chandra, I. Chevyrev, M. Hairer, and H. Shen, Stochastic quantisation of Yang-Mills-Higgs in 3D, arXiv:2201.03487.

[31] A. Chandra and M. Hairer, An analytic BPHZ theorem for regularity structures, arXiv:1612.08138.

[32] A. Chandra, M. Hairer, and H. Shen, The dynamical sine-Gordon model in the full subcritical regime, arXiv:1808.02594.

[33] A. Chandra, A. Moinat, and H. Weber, A priori bounds for the $\Phi^4$ equation in the full sub-critical regime, Arch. Ration. Mech. Anal. **247** (2023), Paper No. 48, 76 pp.

[34] S. Chatterjee, A. Dunlap, Constructing a solution of the $(2+1)$-dimensional KPZ equation. Ann. Prob. **48** (2020), 1014–1055.

[35] F. Comets, C. Cosco, and C. Mukherjee, Renormalizing the Kardar-Parisi-Zhang Equation in $d \geq 3$ in weak disorder, J. Stat. Physics **179** (2020), 713–728.

[36] C. Cosco, S. Nakajima, M. Nakashima, Law of large numbers and fluctuations in the sub-critical and $L^2$ regions for SHE and KPZ equation in dimension $d \geq 3$, Stochastic Process. Appl. **151** (2022), 127–173.

[37] G. Da Prato and A. Debussche, Two-dimensional Navier-Stokes equations driven by a space-time white noise, J. Funct. Anal. **196** (2002), 180–210.

[38] G. Da Prato and A. Debussche, Strong solutions to the stochastic quantization equations, Ann. Probab. **31** (2003), 1900–1916.

[39] A. Dahlqvist, J. Diehl, and B. K. Driver, The parabolic Anderson model on Riemann surfaces, Probab. Theory Related Fields **174** (2019), 369–444.

[40] Y. Deng, A. R. Nahmod, and H. Yue, Invariant Gibbs measures and global strong solutions for nonlinear Schödinger equations in dimension two, arXiv:1910.08492.

[41] Y. Deng, A. R. Nahmod, and H. Yue, Random tensors, propagation of randomness, and nonlinear dispersive equations, Invent. math. **228** (2022), 539–686.

[42] P. Duch, Flow equation approach to singular stochastic PDEs, arXiv:2109.11380.

[43] A. Dunlap, Y. Gu, L. Ryzhik, O. Zeitouni, Fluctuations of the solutions to the KPZ equation in dimensions three and higher, Probab. Th. Rel. Fields **176**, 1217–1258.

[44] J. Dubédat, H. Shen, Stochastic Ricci Flow on Compact Surfaces, International Mathematics Research Notices **2022** (2022) 12253–12301.

[45] D. Erhard and M. Hairer, Discretisation of regularity structures, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **55** (2019), 2209–2248.

[46] D. Erhard and W. Xu, Weak universality of $\Phi^4_3$: polynomial potential and general smoothing mechanism, Electron. J. Probab. **27** (2022), Paper No. 112, 43 pp.

[47] P. K. Friz and M. Hairer, A course on rough paths. With an introduction to regularity structures, Springer, Cham, second edition (2020).

[48] J. Fröhlich, On the triviality of $\lambda\phi^4_d$ theories and the approach to the critical point in $d \underset{(-)}{>} 4$ dimensions, Nuclear Phys. B **200** (1982), 281–296.

[49] M. Furlan and M. Gubinelli, Paracontrolled quasilinear SPDEs. Ann. Probab. **47** (2019), 1096–1135.

[50] C. Garban, Dynamical Liouville, J. Funct. Anal. **278** (2020), 1–54.

[51] M. Gerencsér and M. Hairer, Singular SPDEs in domains with boundaries, Probab. Theory Related Fields **173** (2019), 697–758.

[52] M. Gerencsér and M. Hairer, A solution theory for quasilinear singular SPDEs, Comm. Pure Appl. Math. **72** (2019), 1983–2005.

[53] M. Gerencsér and M. Hairer, Boundary renormalisation of SPDEs, Comm. Partial Differential Equations **47** (2022), 2070–2123.

[54] P. Gonçalves and M. Jara. Nonlinear fluctuations of weakly asymmetric interacting particle systems, Arch. Ration. Mech. Anal. **212** (2014), 597–644.

[55] P. Grazieschi, K. Matetski, and H. Weber, The dynamical Ising-Kac model in 3D converges to $\Phi^4_3$, arXiv:2303.10242.

[56] Y. Gu, Gaussian fluctuations from the 2D KPZ equation, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **8** (2020), 150–185.

[57] M. Gubinelli, Controlling rough paths, J. Funct. Anal. **216** (2004), 86–140.

[58] M. Gubinelli, Ramification of rough paths, J. Differential Equations **248** (2010), 693–721.

[59] M. Gubinelli and M. Hofmanová, Global solutions to elliptic and parabolic $\Phi^4$ models in Euclidean space. Comm. Math. Phys. **368** (2019), 1201–1266.

[60] M. Gubinelli and M. Hofmanová, A PDE Construction of the Euclidean $\Phi^4_3$ quantum field theory, Comm. Math. Phys. **384** (2021), 1–75.

[61] M. Gubinelli, P. Imkeller, and N. Perkowski, Paracontrolled distributions and singular PDEs, Forum Math. Pi **3** (2015), e6, 75 pp.

[62] M. Gubinelli, H. Koch, and T. Oh, Paracontrolled approach to the three-dimensional stochastic nonlinear wave equation with quadratic nonlinearity, J. Eur. Math. Soc. (2023). https://doi.org/10.4171/JEMS/1294

[63] M. Gubinelli, H. Koch, T. Oh, and L. Tolomeo, Global Dynamics for the Two-dimensional Stochastic Nonlinear Wave Equations, International Mathematics Research Notices **2022** (2022), 16954–16999.

[64] M. Gubinelli and N. Perkowski, Energy solutions of KPZ are unique, Comm. Math. Phys. **349** (2017), 165–269.

[65] M. Gubinelli and N. Perkowski, KPZ reloaded, J. Amer. Math. Soc. **31** (2018), 427–471.

[66] M. Gubinelli, B. Ugurcan, I. Zachhuber, Semilinear evolution equations for the Anderson Hamiltonian in two and three dimensions. Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **8** (2020), 82–149.

[67] D. Guin and J.-M. Oudom, On the Lie enveloping algebra of a pre-Lie algebra, J. K-Theory **2** (2008), 147–167.

[68] M. Hairer, Solving the KPZ equation, Ann. of Math. **178** (2013), 559–664.

[69] M. Hairer, A theory of regularity structures, Invent. Math. **198** (2014), 269–504.

[70] M. Hairer and C. Labbé, A simple construction of the continuum parabolic Anderson model on $\mathbf{R}^2$, Electron. Commun. Probab. **20** (2015), no. 43, 11 pp.

[71] M. Hairer and C. Labbé, The reconstruction theorem in Besov spaces, J. Funct. Anal. **273** (2017), 2578–2618.

[72] M. Hairer and C. Labbé, Multiplicative stochastic heat equations on the whole space, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), 1005–1054.

[73] M. Hairer and K. Matetski, Discretisations of rough stochastic PDEs. Ann. Probab. **46** (2018), 1651–1709.

[74] M. Hairer and J. Mattingly, The strong Feller property for singular stochastic PDEs, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **54** (2018), 1314–1340.

[75] M. Hairer and É. Pardoux, A Wong-Zakai theorem for stochastic PDEs, J. Math. Soc. Japan **67** (2015), 1551–1604.

[76] M. Hairer and É. Pardoux, Fluctuations around a homogenised semilinear random PDE, Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), 151–217.

[77] M. Hairer and J. Quastel, A class of growth models rescaling to KPZ, Forum Math. Pi **6** (2018), e3, 112 pp.

[78] M. Hairer, M D. Ryser, and H. Weber, Triviality of the 2D stochastic Allen-Cahn equation, Electron. J. Probab. **17** (2012), no. 39, 14 pp.

[79] M. Hairer and P. Schönbauer, The support of singular stochastic PDEs, Forum Math. Pi **10** (2022), e1, 127 pp.

[80] M. Hairer and H. Shen, The dynamical sine-Gordon model, Comm. Math. Phys. **341** (2016), 933–989.

[81] M. Hairer and H. Shen, A central limit theorem for the KPZ equation, Ann. Probab. **45** (2017), 4167–4221.

[82] M. Hairer and R. Steele, The $\Phi^4_3$ measure has sub-Gaussian tails, J. Stat. Phys. **186** (2022), no. 3, Paper No. 38, 25 pp.

[83] M. Hairer and R. Steele, The BPHZ theorem for regularity structures via the spectral gap inequality, arXiv:2301.10081.

[84] M. Hairer and H. Weber, Large deviations for white-noise driven, nonlinear stochastic PDEs in two and three dimensions, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **24** (2015), 55–92.

[85] M. Hairer and W. Xu, Large scale limit of interface fluctuation models, Ann. Probab. **47** (2019), 3478–3550.

[86] S. Hensel and T. Rosati, Modelled distributions of Triebel-Lizorkin type, Studia Math. **252** (2020), 251–297.

[87] M. Hoshino, KPZ equation with fractional derivatives of white noise, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **4** (2016), 827–890,

[88] M. Hoshino, H. Kawabi, and S. Kusuoka, Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$-quantum field model driven by space-time white noise on the torus, J. Evol. Equ. **21** (2021), 339–375,

[89] M. Hoshino, H. Kawabi, and S. Kusuoka, Stochastic quantization associated with the $\exp(\Phi)_2$-quantum field model driven by space-time white noise on the torus in the full $L^1$-regime, Probab. Theory Related Fields **185** (2023), 391–447.

[90] M. Hairer and W. Xu, Large-scale behavior of three-dimensional continuous phase coexistence models, Comm. Pure Appl. Math. **71** (2018), 688–746.

[91] M. Hofmanová, R. Zhu, and X. Zhu, A class of supercritical/critical singular stochastic PDEs: existence, non-uniqueness, non-Gaussianity, non-unique ergodicity, J. Funct. Anal. **285** (2023). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2023.110011

[92] S. Janson, Gaussian Hilbert spaces, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

[93] A. Jagannath and N. Perkowski, A simple construction of the dynamical $\Phi^4_3$ model, Trans. Amer. Math. Soc. **376** (2023), 1507–1522.

[94] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 889–892.

[95] A. Kupiainen, Renormalization group and stochastic PDEs, Ann. Henri Poincaré **17** (2016), 497–535.

[96] C. Labbé, The continuous Anderson hamiltonian in $d \leq 3$, J. Funct. Anal. **277** (2019), 3187–3235.

[97] P. Linares, F. Otto, M. Tempelmayr, and P. Tsatsoulis, A diagram-free approach to the stochastic estimates in regularity structures, arXiv:2112.10739.

[98] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), 215–310.

[99] J. Magnen and J. Unterberger, The scaling limit of the KPZ equation in space dimension 3 and higher, J. Stat. Phys. **171** (2018), 543–598.

[100] D. Manchon, Hopf algebras, from basics to applications to renormalization, arXiv:0408405.

[101] J. Martin and N. Perkowski, A Littlewood-Paley description of modelled distributions, J. Funct. Anal. **279** (2020), 108634, 22 pp.

[102] T. Matsuda and W. van Zuijlen, Anderson Hamiltonians with singular potentials, arXiv:2211.01199.

[103] A. Moinat and H. Weber, Space-time localisation for the dynamic $\Phi^4_3$ model, Comm. Pure Appl. Math. **73** (2020), 2519–2555.

[104] J.-C. Mourrat and H. Weber, Global well-posedness of the dynamic $\Phi^4$ model in the plane. Ann. Probab. **45** (2017), 2398–2476.

[105] J.-C. Mourrat and H. Weber, The dynamic $\Phi^4_3$ model comes down from infinity. Comm. Math. Phys. **356** (2017), 673–753.

[106] J.-C. Mourrat and H. Weber, Convergence of the two-dimensional dynamic Ising-Kac model to $\Phi^4_2$, Comm. Pure Appl. Math. **70** (2017), 717–812.

[107] A. Mouzard, Weyl law for the Anderson Hamiltonian on a two-dimensional manifold, Ann. Inst. H. Poincaré, Probabilités et Statistiques **58** (2022), 1385–1425.

[108] D. Nualart, The Malliavin calculus and related topics, Springer-Verlag, Berlin (2006).

[109] T. Oh, M. Okamoto, and L. Tolomeo, Stochastic quantization of the $\phi^3_3$-model, arXiv:2108.06777.

[110] T. Oh, T. Robert, N. Tzvetkov and Y. Wang, Stochastic quantization of Liouville conformal field theory, arXiv:2004.04194.

[111] T. Oh, T. Robert and Y. Wang, On the parabolic and hyperbolic Liouville equations, Comm. Math. Phys. **387** (2021), 1281–1351.

[112] T. Oh, L. Tolomeo, Y. Ang, G. Zheng, Hyperbolic $P(\Phi)_2$-model on the plane, arXiv:2211.03735.

[113] F. Otto, J. Sauer, S. Smith, and H. Weber, Parabolic equations with rough coefficients and singular forcing, arXiv:1803.07884.

[114] F. Otto and H. Weber, Quasilinear SPDEs via Rough Paths, Arch Rational Mech Anal **232** (2019), 873–950.

[115] G. Parisi and Y.-S. Wu, Perturbation theory without gauge fixing, Sci. Sinica **24** (1981), 483–496.

[116] N. Perkowski, T. C. Rosati, The KPZ equation on the real line, Electron. J. Probab. **24** (2019), no. 117, 56 pp.

[117] D. E. Radford, Hopf algebras, Series on Knots and Everything **49**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ (2012).

[118] P. Rinaldi and F. Sclavi, Reconstruction theorem for germs of distributions on smooth manifolds, J. Math. Anal. Appl. **501** (2021), no. 125215.

[119] H. Shen and W. Xu, Weak universality of dynamical $\Phi^4_3$: non-Gaussian noise, Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput. **6** (2018), 211–254.

[120] 重川 一郎, 確率解析, 岩波書店 (2008).

[121] M. E. Sweedler, Hopf algebras, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York (1969).

[122] B. Ugurcan, Anderson Hamiltonian and associated nonlinear stochastic wave and Schrödinger equations in the full space, arXiv:2208.09352.

[123] L. C. Young, An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration, Acta Mathematica **67** (1936), 251–282.

[124] X. Zhang, R. Zhu, and X. Zhu, Singular HJB equations with applications to KPZ on the real line, Probab. Theory Relat. Fields **183** (2022), 789–869.

[125] R. Zhu and X. Zhu, Three-dimensional Navier-Stokes equations driven by space-time white noise, J. Differential Equations **259** (2015), 4443–4508.