線形代数学 A 第 1 回レポート

課題：下記の問題を解いて，レポートにまとめて提出
締め切り日時：7 月 18 日（水）16:30 まで
提出先：全学教育推進機構教務係内レポート BOX
注意: (1) レポートに学籍番号・氏名を必ず記入すること．
(2) レポートは原則返却しない．必要であればコピーを取って保存すること．

$\boxed{1}$ n を自然数とする．以下に与える行列 A に対して A^n を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ A を $m \times n$, B を $n \times l$ 行列とするとき，${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ A を n 次正方行列, X, Y を $n \times m$ 次行列とし，$AX = AY$ が成り立っているとする．A が正則ならば $X = Y$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ A, P を n 次正方行列とし，P は正則であるとする．k を自然数とするとき $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ A を $(m+n) \times (m+n)$ 行列とし，A のブロック分割が $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ O & R \end{bmatrix}$ で与えられているとする．ただし P は $m \times m$ 行列，Q は $m \times n$ 行列，R は $n \times n$ 行列とし，O は $n \times m$ 零行列とする．P, R が正則ならば A は正則で，A の逆行列が $\begin{bmatrix} P^{-1} & -P^{-1}QR^{-1} \\ O & R^{-1} \end{bmatrix}$ で与えられることを示せ．

$\boxed{6}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が正則かどうか調べよ．また正則の場合は逆行列を求めよ．

$\boxed{7}$ 次のベクトルが 1 次独立か 1 次従属か調べよ．

(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{8}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ の線形結合で表せるか調べよ．

$\boxed{9}$ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ を n 次元列ベクトルとする．
(1) A を $m \times n$ 行列とする．$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ が 1 次従属ならば，$A\mathbf{a}_1, A\mathbf{a}_2, \ldots, A\mathbf{a}_k$ は 1 次従属となることを示せ．
(2) B を n 次正則行列とする．$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ が 1 次独立ならば $B\mathbf{a}_1, B\mathbf{a}_2, \ldots, B\mathbf{a}_k$ は 1 次独立となることを示せ．

$\boxed{10}$ A を $m \times n$ 行列，P を m 次正方行列，Q を n 次正方行列とする．
(1) $\operatorname{rank} PA \leq \operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank} AQ \leq \operatorname{rank} A$ を示せ．
(2) P, Q が正則ならば $\operatorname{rank} PA = \operatorname{rank} A$, $\operatorname{rank} AQ = \operatorname{rank} A$ となることを示せ．