数学解析 第１回レポート

課題：$\boxed{1}$から$\boxed{11}$を解いて，レポートにまとめて提出
締め切り日時：7 月 19 日（木）17:00（厳守）
提出先：基礎工学部 J 棟 6F・数理教室事務室外のレポート回収ボックスに提出

$\boxed{1}$ $C((-\infty,\infty);\mathbb{R})$ における以下の部分集合が部分空間になるかどうか調べよ．
(1) $\{u \in C((-\infty,\infty);\mathbb{R});\ u$ は奇関数 $\}$
(2) $\{u \in C((-\infty,\infty);\mathbb{R});$ 各 $R>0$ に対して $\int_{-R}^{R} u(x)dx = 0\}$
(3) $\{u \in C((-\infty,\infty);\mathbb{R});\ u$ は $(-\infty,\infty)$ 上で C^1 級で，$|u'(x)| \le 1\ (-\infty < x < \infty)\}$

$\boxed{2}$ $C([0,1];\mathbb{R})$ におけるノルム $\|\cdot\|_\infty$ を $\|u\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |u(x)|\ (u \in C([0,1];\mathbb{R}))$ で定める．以下の問に答えよ．
(1) $S = \{u \in C([0,1];\mathbb{R});\ u(x) > 0\ (x \in [0,1])\}$ が開集合であることを示せ．
(2) $T = \{u \in C([0,1];\mathbb{R});\ |u(x)| \le 1\ (x \in [0,1])\}$ が閉集合であることを示せ．

$\boxed{3}$ X をノルム空間とする．任意の $u, v \in X$ に対して $\big|\|u\| - \|v\|\big| \le \|u - v\|$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ X をノルム空間とする．X における点列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ が $n \to \infty$ としたとき $u \in X$ に収束しているとする．このとき，$\|u_n\|$ は $n \to \infty$ とするとき $\|u\|$ に収束することを示せ．

$\boxed{5}$ X を内積空間とする．任意の u, v に対して $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2$ が成り立つことを示せ（中線定理）．

$\boxed{6}$ X を内積空間とする．X における点列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty, \{v_n\}_{n=1}^\infty$ が $n \to \infty$ のとき X の点 u, v にそれぞれ収束しているとする．このとき，$n \to \infty$ とするとき (u_n, v_n) は (u, v) に収束することを示せ．

$\boxed{7}$ 関数 $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $u(x) = \max\{x, 0\}\ (x \in \mathbb{R})$ で定義する．以下の問に答えよ．
(1) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ となることを示せ．
(2) $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $x \ge 0$ のとき $v(x) = 1$, $x < 0$ のとき $v(x) = 0$ となる関数とする．v は u の一般化された導関数となることを示せ．

$\boxed{8}$ a, b を $a < b$ なる実数とする．$u \in H^1(a,b)$, $v \in C_0^1(a,b)$ ならば $uv \in H^1(a,b)$ となり，さらに uv の一般化された導関数 $(uv)'$ に対して

$$(uv)' = u'v + uv'$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{9}$ A をノルム空間 X からノルム空間 Y への有界線形作用素とする．A の核 $\mathcal{N}(A)$ は X の閉部分空間となることを示せ．

$\boxed{10}$ X, Y を内積空間とし，有界線形作用素の列 $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{L}(X,Y)$，有界線形作用素 $A \in \mathscr{L}(X,Y)$ を考える．以下の問に答えよ．
(1) $n \to \infty$ のとき $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ は A に作用素ノルムの意味で収束しているとする．このとき，任意の $u \in X$ に対して $A_n u \to Au\ (n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．
(2) 任意の $u \in X$ に対して $A_n u \to Au\ (n \to \infty)$ が成り立っているとする．このとき，任意の $v \in X$, $w \in Y$ に対して $(A_n v, w) \to (Av, w)\ (n \to \infty)$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{11}$ X を Hilbert 空間，L を X の閉部分空間とする．L への射影作用素 P_L は X から X への有界線形作用素であることを示せ．また $\|P_L\| = 1$ となることを示せ．