対応のある共分散行列の同時分析
— 震災ストレスデータの経時分析 —

○狩野 裕 [1)]，豊本満喜子 [1)]，服部祥子 [2)]，山田冨美雄 [3)]，島井哲志 [4)]
[1)] 大阪大学人間科学部，[2)] 大阪薫英女子短期大学，[3)] 大阪府立看護大学，[4)] 神戸女学院大学

0. はじめに　共分散構造分析における多母集団の同時分析は，(i) 男女間において因子構造に差異があるかどうか，(ii) アメリカ，イギリス，日本の母集団を比較して，因子構造や因子平均に有意な違いがあるかどうかなどを，統計的に検討するためのツールである．すなわち，同方法によって，複数個の母集団に対して同様の測定を施して得られる共分散行列について，母集団間での因子構造やパラメータの比較を統計的検定を用いて検討することができる．

因子構造として検証的因子分析モデル (CFA) を例にとるならば，この分析は，複数個の母集団の間に「同一」の CFA を想定することが可能かどうかの検定である．この「同一」の程度は，同じところにパスが引かれているというやや弱い条件から，因子負荷や分散共分散の全てが等しいという非常に強い条件まで様々である． 多母集団の同時分析ではそれぞれの母集団から個別に得られたモデルをもとに，弱い条件から順次強い条件を検定していく (豊田 1998; 狩野 1997).

従来の探索的因子分析を各母集団に適用し結果を比較することは可能であるが，統計的に比較するためのツールは提供されていない．そのようなオプションは数理的には簡単であるが，推定すべきパラメータが多すぎ，有意義な知見は得られないであろう．

さて，このような統計的推測方法を経時データ（対応のあるデータ）に対して行いたいことがある．本報告では，実際の経時データの分析を例に，対応のある共分散行列について，それらの構造を比較検討するための統計的方法論を報告する．

1. データ　ここで分析するデータは，阪神・淡路大震災の折りに，子どもの震災ストレス反応を数量的に把握する目的で開発された質問紙調査「自分を知ろうチェックリスト」（服部・山田ら，1995）によるものである．ここで測定された 24 の質問項目はそれぞれ「不安」「うつ」「精神的混乱」「愛他性」の４因子のいずれかに関与することが想定されている．この調査は，震度７（激震）の西宮市内の，被災当時小学１年生から６年生までの児童を対象に，被災から２ヵ月後，６ヵ月後，１年後，２年後，３年後の計５回実施された．また，コントロール群として大阪府 H 市（震度４）でも被災から２ヵ月後，６ヵ月後，１年後の３回にわたってデータを採っている.[1]

このような質問紙調査において,（平均の）経時変化をみるには，通常，因子分析を行って次元縮小（尺度化または簡易スコア化）をしてから経時データの分析に移るが，もし因子構造が時点によって変化するならば分析は難しくなる．したがって，時点に対する因子構造の不変性の確認が重要である．しかし，時点間に対応があるため，普通の多母集団の同時分析は，この状況には適用できない．

ここでは，５回とも測定され，かつ回答に欠損のない児童 320 名を扱い，先にあげた４因子のうち不安，うつ，精神的混乱の３因子に関する 21 項目について，その因子構造を比較，再検討する．具体的には，研究の第一歩として，１回目（２ヵ月後）と５回目 (３年後）の２時点について比較検討したものを紹介する．

2. 同時分析の手順　1 回目と２回目 (上記のデータでは５回目) の測定を表す確率ベクトルを，それぞれ $\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ としよう．一般の多母集団の同時分析では，$\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_2$ は独立であるが，経時データでは独立ではないことに注意する．ここでは検証的因子分析モデルを採用する．

2.1 個別分析　同時分析で用いるモデルは，それぞれの集団において当てはまっていることが前提である．すなわち，それぞれの共分散行

[1] 山田・豊本・狩野 (2000) は,「自分を知ろうチェックリスト」の因子構造を西宮市群と H 市群とで比較している．

列において (1) の適合度検定を個別に行い，帰無仮説が受容されるか，もしくは，大標本の場合は適合度指標で良いフィットが保証されていることが必要である．これは多母集団の同時分析の場合と同様である．当初のモデルが棄却された場合，LM 検定を参考にパスを加える，あるいはワルド検定により不要なパスを外すなどの修正を加え，より適合の高いモデルを探索する．

検定すべき適合度仮説は以下のとおりである：

$$\begin{array}{l} H_0 : V(\boldsymbol{X}_1) = \Lambda_1\Phi_1\Lambda_1^T + \Psi_1 \text{ vs } H_1 : \text{not} \quad H_0 \\ H_0 : V(\boldsymbol{X}_2) = \Lambda_2\Phi_2\Lambda_2^T + \Psi_2 \text{ vs } H_1 : \text{not} \quad H_0 \end{array} \tag{1}$$

ここで，Λ_1 と Λ_2 は同一の構造をもつ，すなわち，どちらの母集団に対しても同じパスを引くモデルである．ただし，この段階では，因子負荷の推定値は等しくなくてよい．

2.2 配置不変　次に，個別分析によって得られたそれぞれのモデルに基いて，複数個の共分散行列を同時に検定する．これにより，全体の有意水準を指定された α に保つことができる．

$$\begin{array}{l} H_0 : V \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1\Phi_1\Lambda_1^T + \Psi_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Lambda_2\Phi_2\Lambda_2^T + \Psi_2 \end{bmatrix} \\ \quad \text{vs} \\ H_1 : \text{not} \quad H_0 \end{array} \tag{2}$$

ここで，$\Sigma_{12} = \mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ であり，Σ_{12} には何の構造も設定していない．

因子パターン Λ_1 と Λ_2 は同一の構造であることを仮定しているので，(2) のモデルが適合するとき，**配置不変**が成り立つという．

2.3 測定不変　配置不変が成り立つとき，すなわち同一の因子構造が受容されることを確認した上で，ようやく同時分析に移る．まず，(2) において，$\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$ となるモデルの適合度検定を行う：

$$\begin{array}{l} H_0 : V \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda\Phi_1\Lambda^T + \Psi_1 & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Lambda\Phi_2\Lambda^T + \Psi_2 \end{bmatrix} \\ \quad \text{vs} \\ H_1 : \text{not} \quad H_0 \end{array} \tag{3}$$

これは複数回の測定を通して（いずれの共分散行列においても）因子負荷が同一の値になることを意味している．(3) の帰無仮説が受容されたとき**測定不変**が成り立つという．このとき，各測定において同一の因子構造であること，そして，同じ因子が存在することが主張できるだろう．

2.4 より強い因子不変性　多母集団の同時分析と同様，測定不変が成り立つときには，因子不変性に関してより強い条件が満たされるかどうかを順次検討していく．すなわち，

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \text{and/or} \quad \Psi_1 = \Psi_2$$

を検定していくことができる．

2.5 いくつかの注意点　因子の尺度を定めるには，因子の分散を 1 に固定する方法と当該因子からある観測変数（marker variable という）への因子負荷を 1 に固定する方法がある．同時分析においては，母集団のとり方により因子の分散共分散が変化する可能性があるので，因子負荷を 1 に固定することが多い．しかし，実は，因子の分散の変化と marker variable への因子負荷の変化は互いに交絡しており，それぞれの変化を区別して推定することができない．ここでは，後々の尺度化を念頭におき，ふつうの検証的因子分析と同様，因子の分散を 1 に固定した（尺度化等これ以降の分析については後日報告したい）．

多母集団の同時分析の基本は（相関行列ではなく）共分散行列の分析である．その理由は，因子からの影響 Λ は不変であるが，因子の分散 Φ や誤差分散 Ψ が母集団によって異なるという状況が多く，その場合，相関行列に変換すると Λ の相等性が崩れるからである．この事実は経時データの分析においても正しい．一方，母集団間で，（因子の影響ではなく）信頼性が等しいという状況や，また，信頼性の相等性を調べたいという状況もある．このようなときは相関行列を分析することになる．本報告では，相関行列に基づく分析と共分散行列に基づく分析の両方を行い比較した．

では，共分散行列で分析した場合，標準解はどのようにして求めればよいのだろうか．多母集団の同時分析の場合は，母集団に関してプールした分散で共通に標準化することが常道である．すなわち，標本共分散行列を S_1，S_2，サンプルサイズを n_1，n_2 としたとき，

$$S = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2}$$

によって，$R_g = \mathrm{Diag}(S)^{-1/2} S_g \mathrm{Diag}(S)^{-1/2}$ $(g = 1, 2)$ と変換する (e.g., Jöreskog 1971; Cudeck 1989)．経時データの場合も同じ考え方が適用できる．[2]

3. 実際的な問題

3.1 配置不変が成立しない場合　個別分析や配置不変の検討で，因子負荷に同じ構造が仮定できない場合，同時分析へは進めないのであろうか．この問題はしばしば提起されるものであ

[2] 本報では，標準解は報告していない．

る.「自分を知ろうチェックリスト」の分析でもそのようなことが起こった.

比較すべき集団間で共通因子が同等と考えられるかどうかは別にして，どの因子負荷が集団間で異なるのか，または，等しいと考えてよいのか，という情報は貴重である.

上記のような場合は,「一つの集団で引いてあるパスはもう一つの集団でも引く」ということを行うことで，両集団に同じ因子構造を設定することができる．そうしてから測定不変性の検討を行う．すなわち，集団間で因子負荷を等値制約を置いて推定し，LM 検定によって棄却された等値制約を順に外していく．そして，適合度の良いモデルに達するまで，これを繰り返す.最後に，ワルド検定によって，有意でない因子負荷を0に固定する.

このような分析から,（LM 検定によって棄却されないという意味で）集団間で等値制約が成立する因子負荷,（LM 検定によって棄却されるという意味で）等値制約が成立しない因子負荷を区別することができる．また，後者は，(i) 両因子負荷が非ゼロで異なる場合と，(ii) 一方がゼロで他方が非ゼロという場合に区別することができる (ワルド検定).

3.2 実際的な LM 検定 個別分析や因子不変性の検討において，モデルが棄却された場合には，LM 検定を参考に新たにパスを引いたり，等値制約を外したりしてモデルを修正することが必要である．単純な数理統計的な考えの下では，自由度1のカイ2乗分布の上側 5%点 (=3.841) に基づき，LM 検定統計量の値がこれよりも大きければパスを引く，ないしは等値制約を外すことになる．しかし，この判断は以下の理由で薦められない．(i) 適合度検定と同様に，大標本の場合は統計量の値が大きくなる．無視し得るような小さなズレを検出して有意と判定してしまう．(ii) 検定の多重性の問題.

そこで，大量に出力される LM 統計量の値を大きさの順に並べ，極端に大きなものがあれば，そのパスを入れる，または，等値制約を外すことにする．また，2つ以上同時に入れない.

4. 分析結果 相関行列の分析では，配置不変の成立が認められた後，測定不変の検定においてモデルが棄却されたため，2つの等値制約を外しモデルを修正した．したがって，二回の測定は同一の因子構造をもつものの，その因子負荷の推定値に関してはすべてが等しいということはできない.

一方，共分散行列の分析では,「混乱」因子の変数 Q521 に対する因子負荷において配置不変が成立していない．すなわち，この等値制約が棄却された後，5回目のデータの因子負荷がワルド検定によって有意にならなかった．これを含めて，合計6つの因子負荷の間に有意差がみられた.

次ページに，最終モデルと推定結果を示す．時点間で有意差のあるパスに*をつけている．表で枠で囲んであるのは初期モデルとして想定された因子構造に含まれるものである．また，質問18, 23，24，すなわち Q118，Q123，Q124，Q518, Q523，Q524 が欠損しているが，これは愛他性に関する項目である.

なお，因子間相関を等置したモデルもよい適合を示した.

5. さいごに 本報告の要点は，式 (2) である．経時データであっても，時点間の共分散を導入することで，多母集団の同時分析のような分析技法が適用できる．これを実行するには，$\boldsymbol{X}_1$ と $\boldsymbol{X}_2$ の誤差項の間に共分散を設定する．統計的には，MTMM 行列の分析における同一方法で測定した項目の誤差間に共分散を設定するモデルと同等である (e.g., Marsh-Byrne-Craven 1992).

ここで扱ったものはいわゆる三相データ（変数 × 条件 × 個体）である．三相データを分析するための手法としては，変数と条件を因子として設定し，因子の加法モデルを考える検証的因子分析モデル，因子の積を考える直積モデル，また，二つの相の背後に共通に一組の因子を想定し因子負荷に積の形で二相の違いを実現する PARAFAC などがある．どのモデルも，変数にも条件にも因子分析モデルが想定され,「条件間での変数の共分散構造」を表すのに工夫がなされている．しかし，このようにして導入された「条件間での変数の共分散構造」には，それを支える積極的な理論がなく，そして，モデルの適合度が良くないことしばしばである．ということであれば,「条件間での変数の相関構造」に飽和モデルを設定しようというのが本報告のアイデアである.

References

Cudeck (1989). Analysis of correlation matrices using covariance structure models. *Psychological Bulletin*, **105**, 317-327.

Jöreskog, K. G. (1971). Simultaneous factor analysis in several populations. *Psychometrika*, **36**, 409-426.

Marsh-Byrne-Craven (1992). Overcoming problems in confirmatory factor analyses of MTMM data: The correlated uniqueness model and factorial invariance. *Multivariate Behavioral Research*, **27**, 489-507.

狩野（1997）．グラフィカル多変量解析．現代数学社

豊田 (1998). 共分散構造分析 [入門編]. 朝倉書店
服部・山田（編）(1999). 阪神・淡路大震災と子どもの心身. 名古屋大学出版会.
山田・豊本・狩野 (2000). 自分を知ろうチェックリストの因子構造. 日本健康心理学会第13会大会講演予稿集（印刷中）.

＜相関行列＞

変数	不安	うつ	混乱
Q101	.254	.513	
Q108	.322		.343
Q109	.569	.212	
Q110	.790		
Q111	.690	.244	-.244
Q119	-.468*		.373
Q120	.523		.187
Q121	.575		.165
Q122	.709		
Q103		.732	
Q105		.633*	
Q107		.711	
Q112	.188	.421	
Q114		.574	
Q115		.376	
Q102		.148	.482
Q104		-.337	.696
Q106			.566
Q113			.657
Q116		.374	.213
Q117			.632
不安	1.000	.586	.451
うつ	.586	1.000	.658
混乱	.451	.658	1.000

変数	不安	うつ	混乱
Q501	.254	.513	
Q508	.322		.343
Q509	.569	.212	
Q510	.790		
Q511	.690	.244	-.244
Q519	-.234*		.373
Q520	.523		.187
Q521	.575		.165
Q522	.709		
Q503		.732	
Q505		.367*	
Q507		.711	
Q512	.188	.421	
Q514		.574	
Q515		.376	
Q502		.148	.482
Q504		-.337	.696
Q506			.566
Q513			.657
Q516		.374	.213
Q517			.632
不安	1.000	.510	.421
うつ	.510	1.000	.740
混乱	.421	.740	1.000

適合度	n	320
	χ^2 値	723.891
	df	379
	CFI	0.924
	GFI	0.902
	RMSEA	0.054

＜共分散行列＞

変数	不安	うつ	混乱
Q101	.337	.660	
Q108	.508		.506
Q109	.715	.371*	
Q110	1.323*		
Q111	.848	.258	-.299
Q119	-.673*		.553
Q120	.852		.297
Q121	.700		.465*
Q122	1.107		
Q103		.767	
Q105		.568*	
Q107		.850	
Q112	.163	.541*	
Q114		.500	
Q115		.297	
Q102		.208	.690
Q104		-.539	1.121
Q106			.916
Q113			.996
Q116		.489	.300
Q117			.801
不安	1.000	.553	.434
うつ	.553	1.000	.653
混乱	.434	.653	1.000

変数	不安	うつ	混乱
Q501	.337	.660	
Q508	.508		.506
Q509	.715	.161*	
Q510	.951*		
Q511	.848	.258	-.299
Q519	-.351*		.553
Q520	.852		.297
Q521	.700		*
Q522	1.107		
Q503		.767	
Q505		.182*	
Q507		.850	
Q512	.163	.229*	
Q514		.500	
Q515		.297	
Q502		.208	.690
Q504		-.539	1.121
Q506			.916
Q513			.996
Q516		.489	.300
Q517			.801
不安	1.000	.547	.488
うつ	.547	1.000	.739
混乱	.488	.739	1.000

適合度	n	320
	χ^2 値	713.098
	df	376
	CFI	0.926
	GFI	0.903
	RMSEA	0.053