水ゼミ修正版
エッジワース展開

M1　田辺竜ノ介

r次エッジワース展開

$X_1, X_2, \dots, X_n$ が互いに独立で同一な非格子分布 F に従い，
有限な $r+2$ 次モーメントを持つとき

$$F_n(x) - \Phi(x) - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{r} \frac{Q_k(x)}{n^{\frac{k}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}}}\right)$$

となる．ただし

$$F_n(x) = P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \xi)}{\sigma} \le x\right] \qquad \begin{aligned} &E[X_k] = \xi, V[X_k] = \sigma^2 \\ &E[(X_k - \xi)^i] = \mu_i \end{aligned}$$ である．

Q_k は多項式であり，具体的には

$$Q_1(x) = \frac{\mu_3}{6\sigma^3}(1 - x^2)$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\sigma^4}\left[\frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{24}(x^3 - 3x) + \frac{\mu_3}{72\sigma^2}(x^5 - 10x^3 + 15x)\right]$$

1次エッジワース展開

$X_1, X_2, ..., X_n$ が互いに独立で同一な非格子分布 F に従い,
有限な 3次モーメントを持つとき

$$F_n(x) - \Phi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

ここで

$$Q_1(x) = \frac{\mu_3}{6\sigma^3}(1 - x^2)$$

証明

$$G(x) = F_n(x), H(x) = \Phi(x) + \phi(x)\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}}$$ と置く

$$|G(x) - H(x)| \leq o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$ を言えたら良い.

証明に際して次の定理を用いる.

定理

A,T, $\varepsilon > 0$ は定数. $G(x)$ は非減少関数,$H(x)$は有界変動関数

1 $G(-\infty) = H(-\infty), G(+\infty) = H(+\infty)$

2 $$\int |G(x) - H(x)| dx < \infty$$

3 $H'(x)$ が全ての x に対して存在し $|H'(x)| \leq A$ が成立

4 $\int_{-T}^{T} |\frac{g(t) - h(t)}{t}| dt = \varepsilon$

のとき $k > 1$ に対して有限な $c(k)$ が存在し

$$|G(x) - H(x)| \leq k\frac{\varepsilon}{2\pi} + c(k)\frac{A}{T}$$

が成立

という定理を用いる. ただし, $g(t), h(t)$ は

$$g(t) = \int e^{ity} dG(y), h(t) = \int e^{ity} dH(y)$$ で求まる特性関数.

$$T = \lambda(n)\sqrt{n} \ , \ \lim_{n\to\infty} \lambda(n) = \infty$$

として計算を行うと

$\varepsilon = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ が求まる．これより

$$|G(x) - H(x)| \leq \frac{k}{2\pi}\varepsilon + \frac{c(k)A}{\lambda(n)\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

つまり，１次エッジワース展開が成立することが示せる．

格子分布のエッジワース展開

$X_1, X_2, ..., X_n$ が互いに独立で同一な格子分布 F に従い，有限な　3次モーメントを持ち，格子幅が h であるとき

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\phi(x)}{\sqrt{n}}\left[\frac{\mu_3}{6\sigma^3}(1-x^2) + \frac{h}{2\sigma}\right] + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

が成立する(Gnedenko and Kolmogorov 1954)

自由度1のカイ自乗分布

1－G_n(x)	0.5	0.1	0.05	0.01	サンプルサイズ
1－Φ(x)	0.59	0.91	0.026	0.001	n＝4
1次	0.503	0.121	0.066	0.005	
2次	0.5	0.09	0.049	0.014	
1－Φ(x)	0.575	0.09	0.029	0.001	n＝6
1次	0.502	0.115	0.061	0.006	
2次	0.5	0.094	0.049	0.014	
1－Φ(x)	0.559	0.09	0.032	0.002	n＝10
1次	0.501	0.11	0.058	0.007	
2次	0.5	0.097	0.049	0.012	
1－Φ(x)	0.542	0.092	0.036	0.003	n＝20
1次	0.5	0.105	0.054	0.009	
2次	0.5	0.099	0.05	0.011	
1－Φ(x)	0.527	0.094	0.04	0.004	n＝50
1次	0.5	0.102	0.052	0.01	
2次	0.5	0.1	0.05	0.01	
1－Φ(x)	0.519	0.095	0.043	0.006	n＝100
1次	0.5	0.101	0.051	0.01	
2次	0.5	0.1	0.05	0.01	

前スライドの説明

$1 - G_n(x_0) = \alpha$ となる x_0 で固定し($\alpha = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$)

1次エッジワース展開ならば

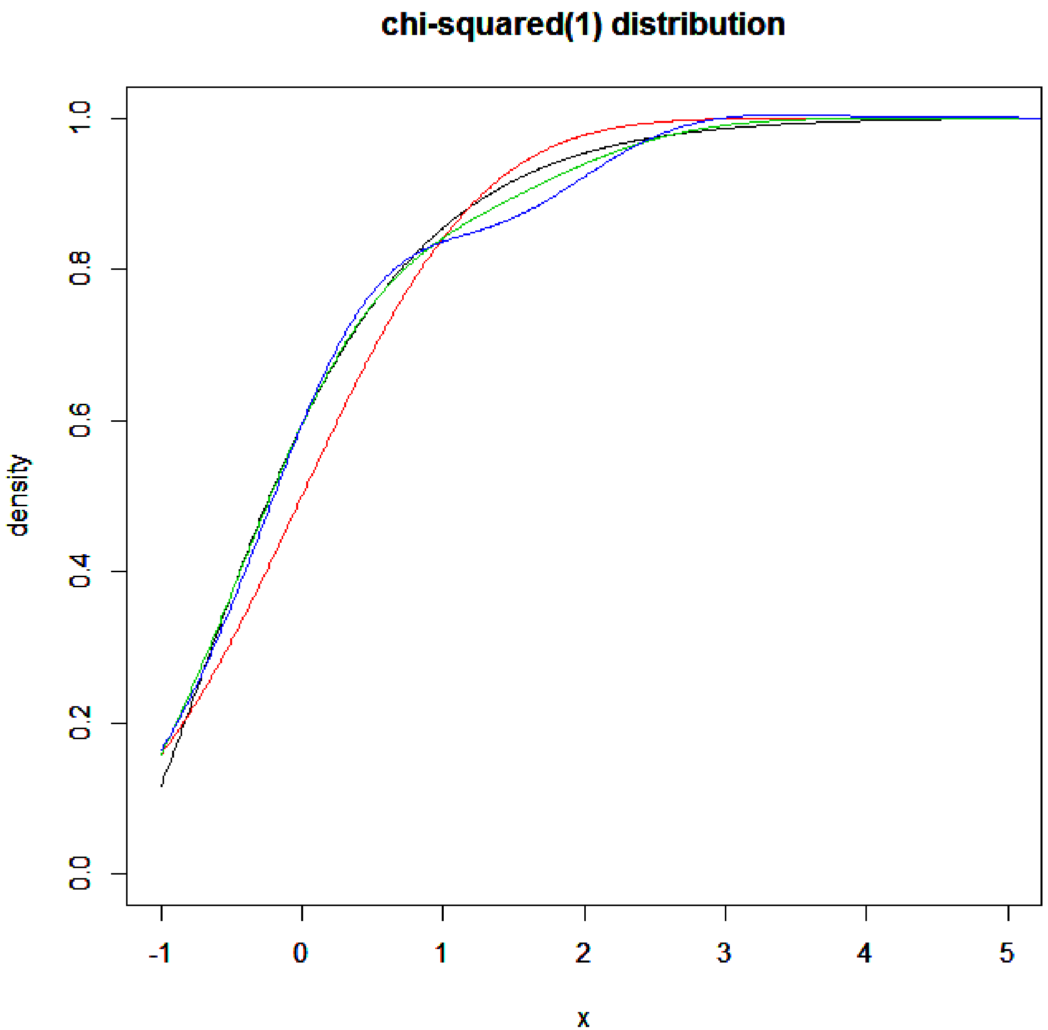
$$\Phi(x_0) + \phi(x_0)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x_0)$$

2次エッジワース展開ならば

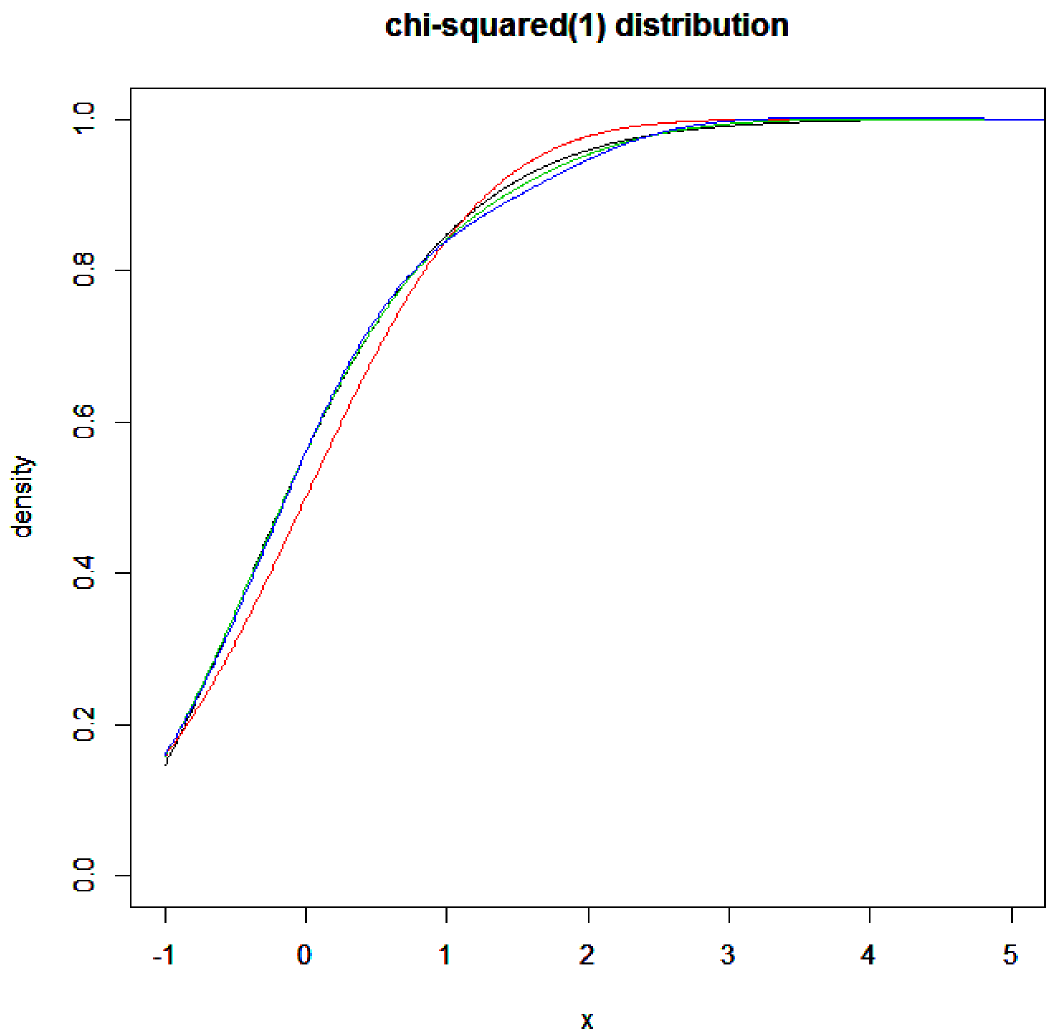
$$\Phi(x_0) + \phi(x_0)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x_0) + \phi(x_0)\frac{1}{n}Q_2(x_0)$$

を該当するセルに入れてある.

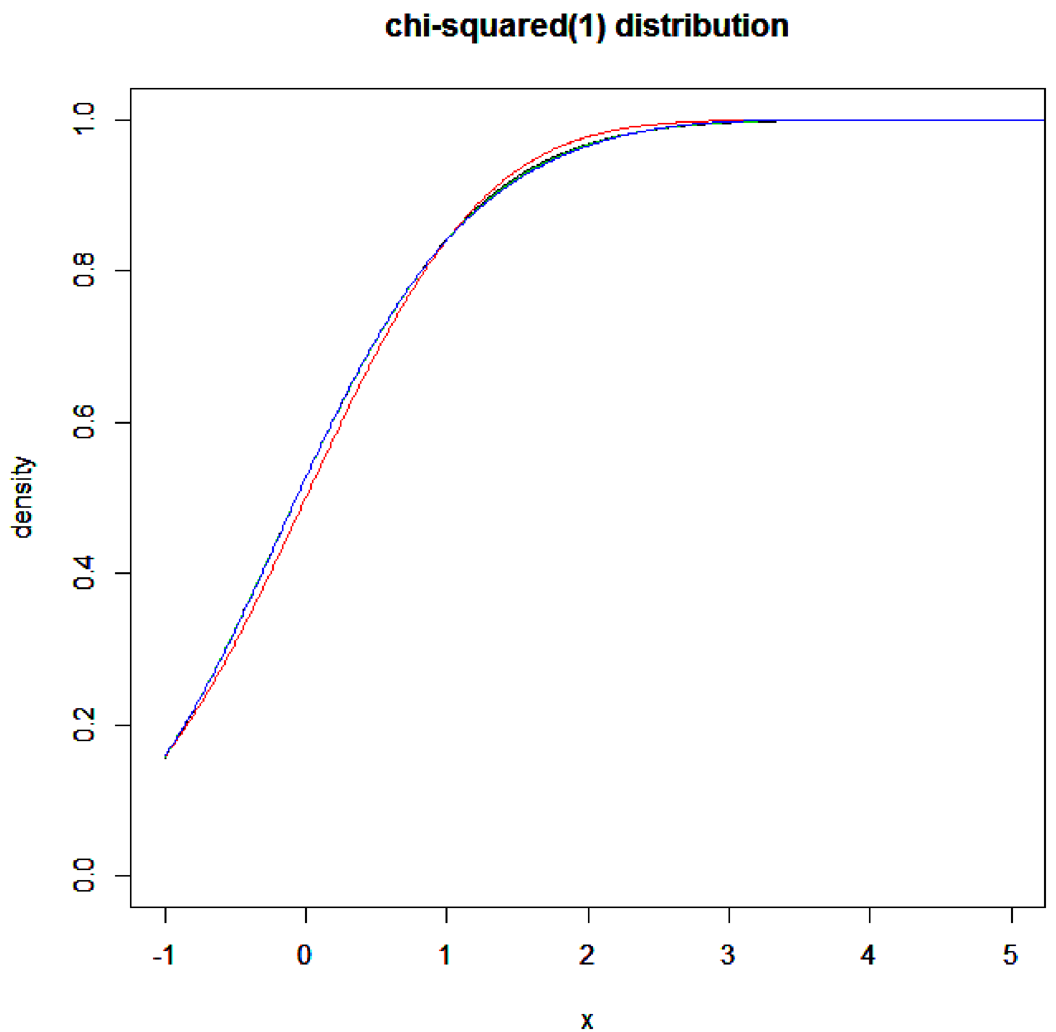
サンプルサイズ4


chi-squared(1) distribution
density
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-1
0
1
2
3
4
5
x

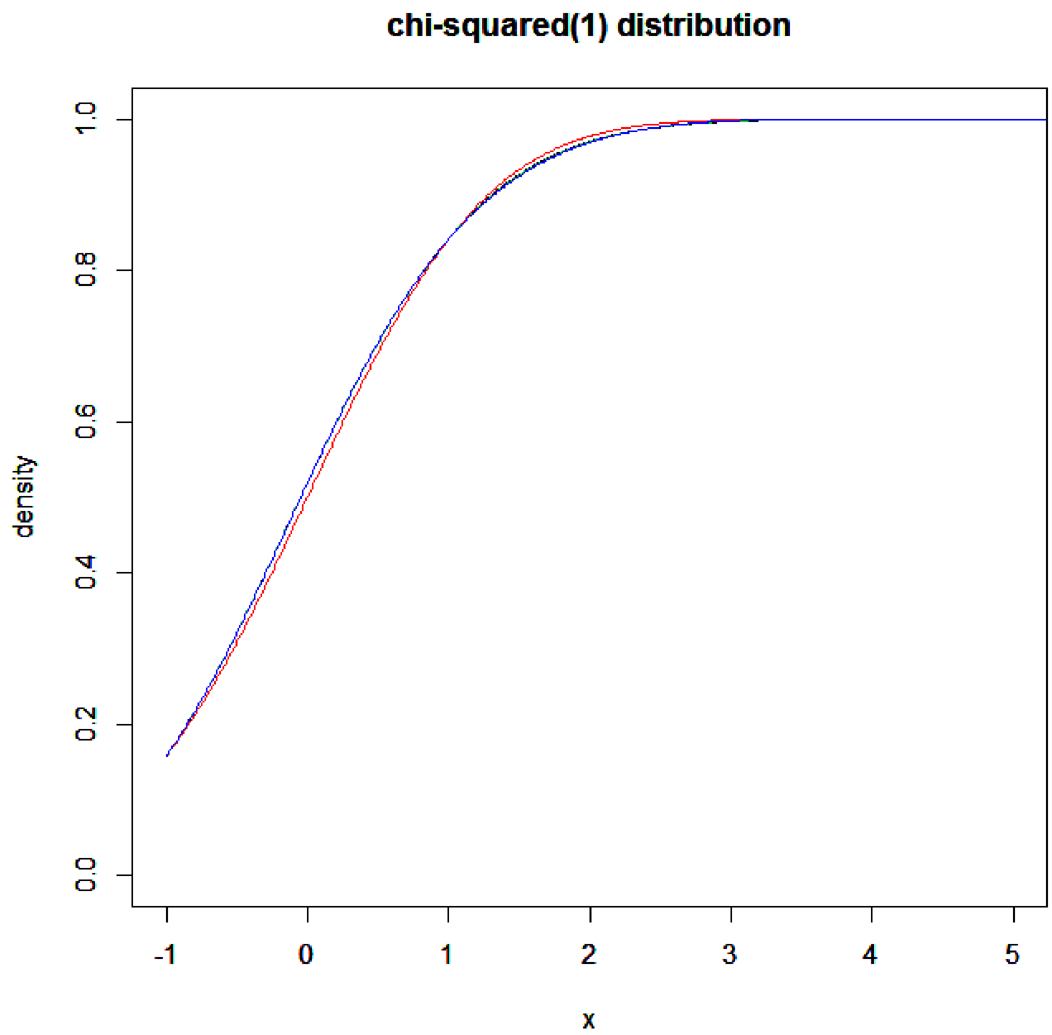
サンプルサイズ10


chi-squared(1) distribution
density
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-1
0
1
2
3
4
5
x

サンプルサイズ50


chi-squared(1) distribution
density
x
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
-1
0
1
2
3
4
5

サンプルサイズ100


chi-squared(1) distribution
density
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-1
0
1
2
3
4
5
x

前スライド説明

カイ自乗分布の中心極限定理とエッジワース展開とのグラフ的比較を行った(スライド9で行ったことをグラフ化した)

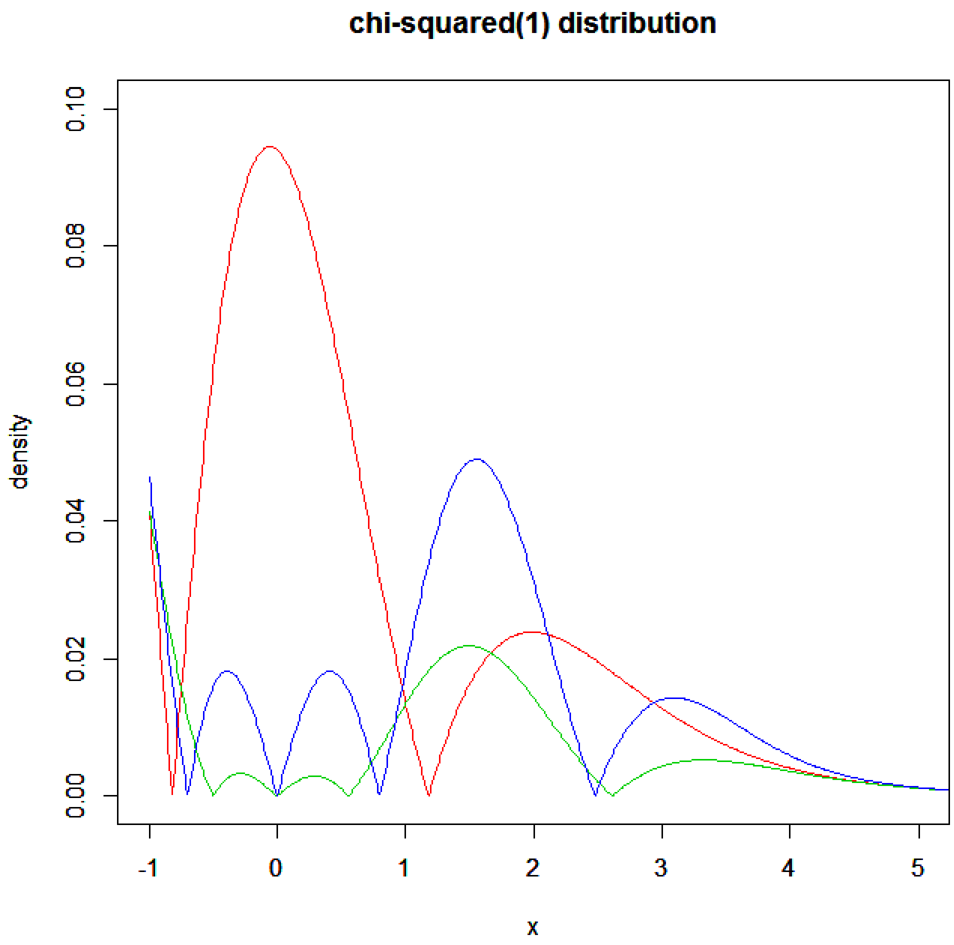
黒: $$Pr\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < x\right)$$

赤 : $$\Phi(x)$$

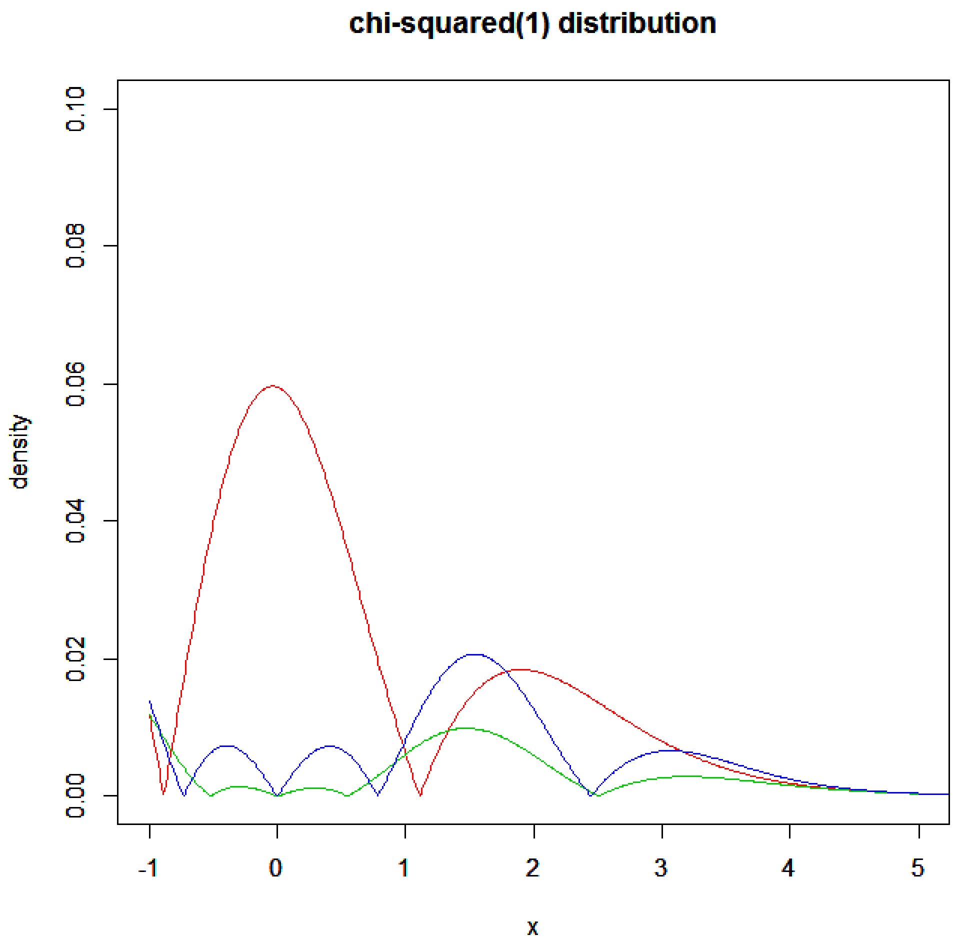
緑 : $$\Phi(x) + \phi(x)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x)$$

青 : $$\Phi(x) + \phi(x)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x) + \phi(x)\frac{1}{n}Q_2(x)$$

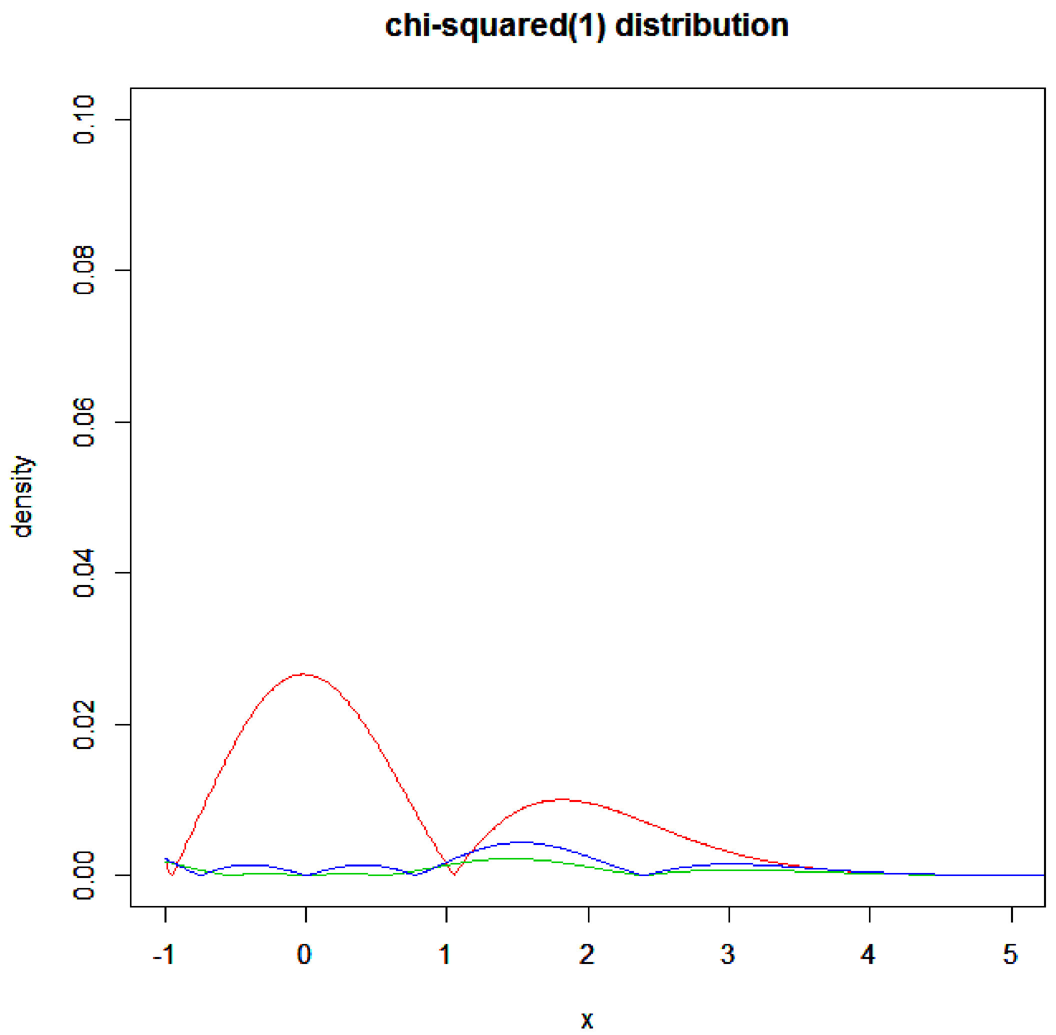
サンプルサイズ4


chi-squared(1) distribution
density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
-1
0
1
2
3
4
5
x

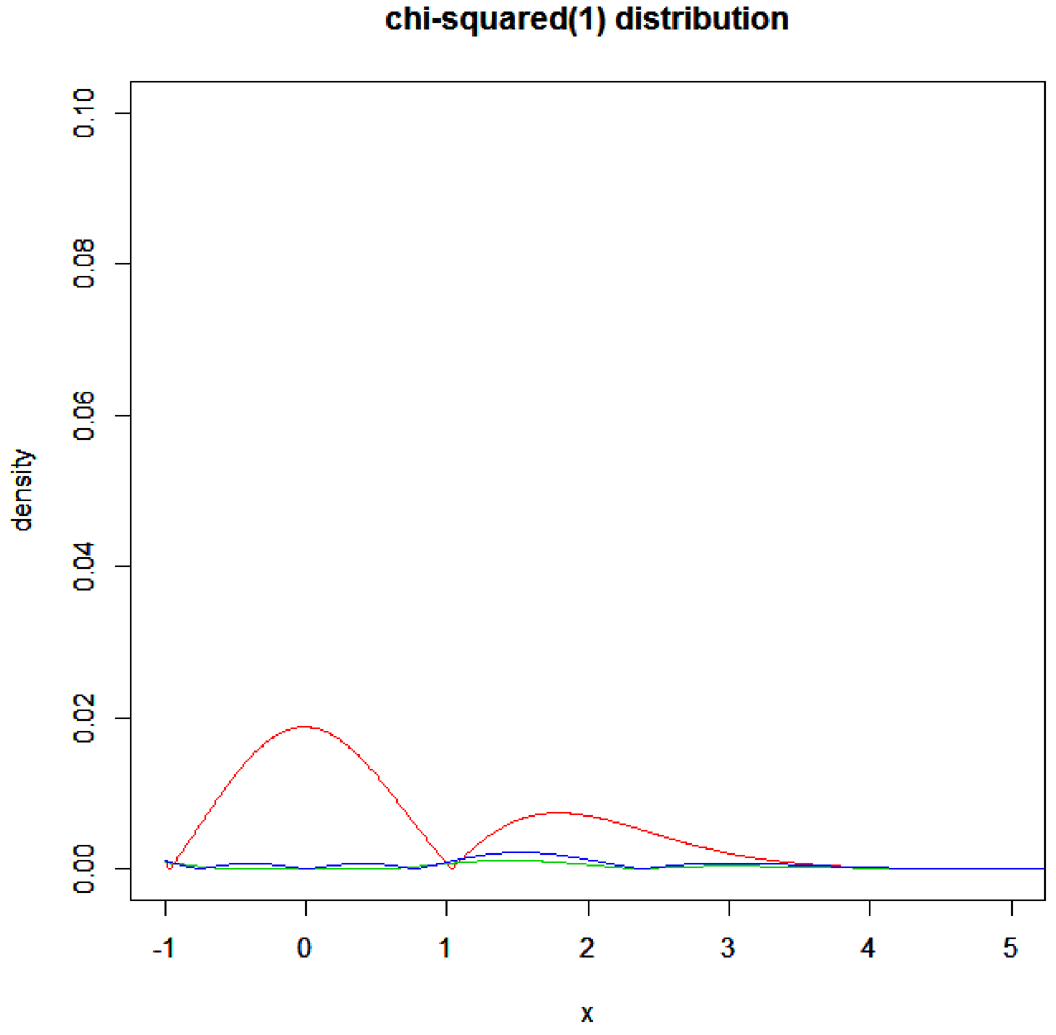
サンプルサイズ10


chi-squared(1) distribution
density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
-1
0
1
2
3
4
5
x

サンプルサイズ50


chi-squared(1) distribution
density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
-1
0
1
2
3
4
5
x

サンプルサイズ100


chi-squared(1) distribution
density
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
-1
0
1
2
3
4
5
x

前スライドの説明

カイ自乗分布について中心極限定理とエッジワース展開の精度．差の絶対値をそれぞれとった

赤 : $|\Phi(x) - Pr\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < x\right)|$

緑 : $|\Phi(x) + \phi(x)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x) - Pr\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < x\right)|$

青 :

$$|\Phi(x) + \phi(x)\frac{1}{\sqrt{n}}Q_1(x) + \phi(x)\frac{1}{n}Q_2(x) - Pr\left(\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}} < x\right)|$$

誤差オーダーの推測

	n=4	8	16	32	64	128
1−Φ（x）	0.094462	0.0667	0.0471	0.033277	0.023519	0.016627
		1.416229	1.416136	1.415404	1.41491	1.414506
一次	0.041412	0.015779	0.00676	0.00342	0.001781	0.000918
		2.624528	2.334163	1.976739	1.919649	1.940733
二次	0.04899	0.02554	0.0132	0.006772	0.003452	0.001751
		1.91818	1.934773	1.949203	1.961557	1.971246

差の絶対値をとっていったものである.

1次の行，8の列の2.624…はn=8の時の差とn=4の時の差の比を取ったものである. これでおおよそのオーダーが推定できる. 1−Φ(x)は誤差オーダーが√n,

1次及び2次エッジワース展開の誤差オーダーはnということが推測できる.

参考文献

1. Leheman [Elements of Large-Sample Theory]
2. Feller(Vol.2)[An Introduction to Probability Thory and Its Applications]
3. Gnedenko and Kolmogorov [LIMIT DISTRIBUTION FOR SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES]