n 体問題入門*

柴山允瑠 (京大 · 理)

2005 年 8 月 19 日

概要

今回の勉強会の理解を深めるため、必要になると思われる予備知識を解説する。以下の解説の多くの部分は一般の力学の問題としても同様の議論ができるが、今回は n 体問題に限って話を進める。

1 n 体問題

n 体問題を考える:

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^3} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \qquad \mathbf{q}_1, \cdots, \mathbf{q}_n \in \mathbf{R^3} \tag{1}$$

ここで, $m_1, \ldots, m_n$ は質点の質量, $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n$ は質点の位置, $U = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$ はポテンシャルエネルギーである. 万有引力定数は 1 としておく. これは時間あるいは距離の単位を変えればよい. または、線形正準変換をしても得られる.

注意 1. n 体問題では $m_1, \ldots, m_n$ は質点の質量を表すと同時に、「m_1 が m_2 に近づいていくと...」といったふうに、質点の名前として使うことも多い.

まず、この方程式を Lagrange 系 (変分問題) として表現することを目指そう。

$$K(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left|\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\right|^2, \quad L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = K(\dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}) \tag{2}$$

とおく. L を **Lagrangian** という。

命題 1. 方程式 (1) は L に関する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \qquad \forall k = 1, \ldots, n \tag{3}$$

と同値である.

証明.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = m_i \dot{\mathbf{q}}_i, \ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i} \qquad \forall k = 1, \ldots, n \tag{4}$$

より明らか. □

* 2005 年度力学系理論勉強会「ハミルトン系の周期軌道と変分法」のレクチャーノート

2　変分問題

n 体問題はいったん忘れて、変分問題を説明する

$\mathbf{I} = [t_0, t_1]$, M を空間 (状況によってベクトル空間とか Riemann 多様体とする) とする．端点を止めた曲線の集合 (状況に応じて Sobolev 空間などの関数空間としたりする) を取る:

$$\mathcal{C}_{q_0,q_1,\mathbf{I}} = \{\mathbf{q} : \mathbf{I} \to M \ |\mathbf{q} \in C^2, \mathbf{q}(t_0) = q_0, \mathbf{q}(t_1) = q_1\} \tag{5}$$

写像

$$\begin{aligned} L:\ TM &\ \to\ \mathbf{R} \\ (x,v) &\ \mapsto\ L(x,v) \end{aligned} \tag{6}$$

が与えられているとする．このとき汎関数 (**作用積分**という) を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{A}:\ \mathcal{C}_{q_0,q_1,\mathbf{I}} &\ \to \mathbf{R} \\ \mathbf{q} &\ \mapsto \int_{t_0}^{t_1} L\left(\mathbf{q}(t), \frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}\right) dt \end{aligned} \tag{7}$$

定義 1. $\mathbf{q} \in \mathcal{C}_{q_0,q_1,\mathbf{I}}$ と $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{C}_{0,0,\mathbf{I}}$ に対して

$$\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\mathbf{q}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{A}(\mathbf{q} + h\mathbf{q}_0) - \mathcal{A}(\mathbf{q})}{h} \tag{8}$$

を $\mathcal{A}$ の $\mathbf{q}$ における $\mathbf{q}_0$ 方向の Gâteaux **微分**という．Gâteaux 微分が 0 のとき, すなわち任意の $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{C}_{0,0,\mathbf{I}}$ に対して

$$\frac{d}{dh}|_{h=0}\mathcal{A}(\mathbf{q} + h\mathbf{q}_0) = 0 \tag{9}$$

のとき, $\mathbf{q}$ を $\mathcal{A}$ の**臨界点** (**停留曲線**) という．

$\mathcal{A}$ の臨界点を求める問題を**変分問題**という．変分問題 (として表現できる問題) の例は, 古典的には, 最速降下線, 測地線, 懸垂線, 等周問題, 弾性曲線, 極小曲面などがあり ([6]), その他にも楕円型方程式, Einstein 計量, Yang-Mills 接続, 調和写像などがある ($\mathbf{I}$ などの設定を変える必要がある) ([8, 9])．

定理 2. $\mathbf{q} \in \mathcal{C}_{q_0,q_1,\mathbf{I}}$ が臨界点であるための必要十分条件は $\mathbf{q}$ が Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \tag{10}$$

を満たすことである．

証明．実際に Gâteaux 微分を計算すると、

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} \mathcal{A}(\mathbf{q} + h\mathbf{q}_0) &= \int_0^T \left.\frac{\partial}{\partial h}\right|_{h=0} L(\mathbf{q} + h\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}} + h\dot{\mathbf{q}}_0) dt \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}_0 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \dot{\mathbf{q}}_0 \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}_0 \right\rangle - \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right), \mathbf{q}_0 \right\rangle dt + \left[\left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \mathbf{q}_0 \right\rangle\right]_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right), \mathbf{q}_0 \right\rangle dt \end{aligned} \tag{11}$$

部分積分と q_0 が端点において 0 を取ることを用いた。$\mathbf{q}$ が臨界点であることは, 任意の $\mathbf{q}_0 \in \mathcal{C}_{0,0,\mathbf{I}}$ に対して, 上の最後の式が 0 となることを意味しているので, Euler-Lagrange 方程式と同値である. □

系 1. 方程式 (1) に対して L を (2) で定めると、(1) の解は作用積分 $\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \int_0^T L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt$ に関する臨界点と一致する.

この系のような n 体問題 (一般に力学) に関する変分問題を **Lagrange 系**ともいう.

注意 2. いま n 体問題の性質は何も使っていないので、一般の力学の方程式も全く同様に変分問題でかける ([2, 5]).

3 Lagrange 系から Hamilton 系へ

対応

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \to \left(\mathbf{q}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\right) =: (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{12}$$

を考える. これを **Legendre 変換**という.
Legendre 変換によって、$\dot{\mathbf{q}}$ を $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ の関数と考える。**ハミルトン関数**を

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p} \rangle - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \tag{13}$$

によって定義する. 特に n 体問題の場合、

$$H = K + U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}|\mathbf{p}_i|^2 - \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$$

となる。関数 H も L の Legendre 変換であるという. 常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),\ \ \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{14}$$

をハミルトン系という.

定理 3. 以上の状況の下で, $\mathbf{q}$ が Euler-Lagrange 方程式を満たすことと, $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ がハミルトン系の解であることは同値である.

証明. H の全微分を取ると

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}d\mathbf{p} \tag{15}$$

(13) の右辺についても全微分を取ると、

$$dH = \dot{\mathbf{q}}d\mathbf{p} - \mathbf{p}d\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}d\dot{\mathbf{q}} \tag{16}$$

$$= \dot{\mathbf{q}}d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}d\mathbf{q} \tag{17}$$

従って、

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{18}$$

が得られる。Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \dot{\mathbf{p}} \tag{19}$$

を意味するのでハミルトン方程式と同値であることが分かる. □

注意 3. 一般には Legendre 変換が意味を持つためには正則性条件 $\det \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{\mathbf{q}} \partial \dot{\mathbf{q}}} \neq 0$ が必要であるが, n 体問題の場合, 正則性条件は質点の質量が正である限り成り立つ.

注意 4. n 体問題を考えるとき, $U = -\sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$ のかわりに $U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}$ 用いて $L = K + U, H = K - U$ とすることが多い. おそらく、今回の勉強会でもそうされると思われる。

4 n 体問題の第一積分

n 体問題の第一積分 (保存量) は以下のものである。どれも微分してみればすぐに分かる。

運動量:	$\sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^n m_i \dot{\mathbf{q}}_i$
角運動量:	$\sum_{i=0}^n \mathbf{q}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{q}_i \times \dot{\mathbf{q}}_i$
ハミルトニアン:	H

また、運動量保存から $\sum_{i=0}^n m_i \mathbf{q}_i - t \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i$ も保存量と考えられる。

$n = 2$ の場合は他に Laplace ベグトル (楕円の長軸の方向を表す) という独立な保存量があるが、以上のもの以外の保存量の存在はほぼ絶望的である。

変分法で議論される場合、一般性を失わないので重心は 0 とされることが多い。その他の保存量は固定して議論すると非ホロノーム拘束 (位置だけでなく速度に関しても制限すること) となり変分法としては考えにくいので、固定して考えることはあまりない。当然、臨界点として得られた解はその量を保存しているはずである. また、位置を配位空間の部分空間 (あるいは部分多様体) に制限する場合 (ホロノーム拘束) は、速度ベクトルも自然とその接空間に制限され、その制限した変分法はその部分空間の座標をそのまま代入して行えばよい ([2, 5]).

5 最小点の存在

Lagrange 系に戻る. 今回 Chen 氏によって n 体問題の様々な解の存在が証明されるが、それは最小化法に基づくであろう. ここで、最小点 (minimizer) の存在について証明しておこう.

$\mathcal{A}$ の定義域となる曲線の集合は状況に応じて (端点を固定しない) 曲線全体の集合の部分集合 Λ を用いる. n 体問題の作用積分 $\mathcal{A}|_\Lambda$ は正であるから下に有界である. 従って、少なくとも $\mathcal{A}|_\Lambda$ の下限は有限値として存在する。問題はこの下限が最小値であるか、すなわちある $\mathbf{q} \in \Lambda$ によって $\mathcal{A}(\mathbf{q})$ の値がその下限となるようにできるかというのが問題となる. $\mathcal{A}$ の最小点は臨界点であり解となるからである. 今回適用されると思われる最小点の存在定理は直接法で証明できる[*1]。関数空間としては Sobolev 空間で考える:

$$H^1 = \left\{ \mathbf{q} : \mathbf{I} \to V \,\middle|\, \mathbf{q} \in L^2, \frac{d\mathbf{q}}{dt} \in L^2 \right\} \tag{20}$$

ここで, V は配位空間、$\mathbf{I} = [0, T]$ である.

$$V = \mathbf{R}^{dn} \tag{21}$$

[*1] Palais-Smale 条件などは使わず比較的簡単である.

$d = 1, 2, 3$ は質点のある空間の次元である．$\Lambda \subset H^1$ とする．

定義 4. $\mathcal{A}|_\Lambda$ が **coercive** であるとは，$||x||_{H^1} \to \infty$ となるとき $\mathcal{A}(x) \to \infty$ となることである．

定理 5. $\mathcal{A}|_\Lambda$ が coercive のとき，$\bar{\Lambda}$ [*2]における $\mathcal{A}$ の最小点が存在する．すなわち，$\mathcal{A}(x_0) = \inf_{x \in \Lambda} \mathcal{A}(x)$ を満たす $x_0 \in \bar{\Lambda}$ が存在する．

補題 1. n 体問題の作用積分 $\mathcal{A}$ は弱下半連続である[*3].

証明．弱収束列

$$x_n \in \Lambda \to x_0 \text{ weakly}$$

を取る．作用積分は下に有界で，$\mathcal{A}(x_n) < M(\forall n)$ としてよいから Fatou の補題が使える。すると、

$$\mathcal{A}(x_0) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{A}(x_n) \tag{22}$$

が成り立ち、これは弱下半連続であることを意味する。 □

定理 5 の証明．$x_n \in \Lambda$ を最小化列，すなわち $\mathcal{A}(x_n) \to \inf_{x \in \Lambda} \mathcal{A}(x)$ を満たす列とする．coercive であるから，$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は有界である．H^1 は Hilbert 空間であるから回帰的 (reflexive) である．回帰的空間の有界閉集合はコンパクトである (関数解析の本、例えば [3] 参照)。よって，弱収束部分列 $x_{n_j} \to x_0 \in \bar{\Lambda}$ が取れる．補題 1 より，

$$\mathcal{A}(x_0) \leq \liminf_{j \to \infty} \mathcal{A}(x_{n_j}) = \inf_{x \in \Lambda} \mathcal{A}(x). \tag{23}$$

従って，x_0 によって $\inf_{x \in \Lambda} \mathcal{A}(x)$ は達成される． □

詳しくは [7] を参照．Palais-Smale 条件が必要となる変分問題の最小化法や mountain pass theorem などに関しては [1, 8].

6 Choreography について

n 体問題に最小化法を用いて周期解を得ようとする研究は Poincaré らによって行われていたが、位相的な設定だけでは衝突が起こりやすいことや、Kepler 問題ですら最小点が一意に定まらない[*4]ことからその後あまり行われてこなかったようである。1980 年頃に再び研究が行われ始め、2000 年には 3 体問題の 8 の字周期解の存在が証明されて注目を集めた ([4])。その証明では曲線に対して位相的な仮定だけでなく、対称性も仮定しためうまくいった．その後、曲線の上を質点が追いかけっこしている軌道は Simó によって Choreography と名付けられ、Chen, 藤原、Chenciner, Montgomery, Ferrario, Terracini, Venturelli, Simó らによって研究されている。

[*2] Λ の閉包

[*3] 注意: 弱下半連続性は下半連続性より強い条件である．

[*4] 太陽のまわりを回る周期 T の惑星の作用積分の値は軌道の形に関わりなく T だけで決まる．

参考文献

[1] A. Ambrosetti and V. Coti Zelati, Periodic solutions of singular Lagrangian systems, Progress in nonlinear differential equations and their applications , 10. Birkhäuser Boston, Inc. , Boston, MA, 1993

[2] V. I. アーノルド, 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.

[3] H. ブレジス、関数解析, 産業図書、1988.

[4] A. Chenciner and R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Ann. Math.* **152**(2000), 881-901.

[5] 伊藤秀一, 常微分方程式と解析力学, 共立講座 21 世紀の数学, 第 11 巻, 共立出版, 1998.

[6] 小磯憲史, 変分問題, 共立講座 21 世紀の数学, 第 12 巻, 共立出版, 1999.

[7] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Second edition.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[8] 田中和永, 非線形問題 2—変分問題入門—, 岩波 現代数学の展開, 2000.

[9] 浦川肇, 変分法と調和写像, 裳華房, 1990.