n 体問題における非衝突特異性*

柴山允瑠 (京大 · 理)

2005 年 8 月 19-22 日

1 非衝突特異性概論

n 体問題における非衝突特異性は Painlevé が提起した問題である．この節では、非衝突特異性の定義と重要な結果を述べる．
n 体問題を考える:

$$m_i\ddot{\mathbf{q}}_i = -\sum_{j\neq i}\frac{m_im_j(\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j)}{|\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j|^3} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \qquad \mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n \in \mathbf{R^3} \tag{1}$$

ここで, $m_1,\ldots,m_n$ は質点の質量, $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n$ は質点の位置, $U=\sum_{i<j}\frac{m_im_j}{|\mathbf{q}_i-\mathbf{q}_j|}$(負のポテンシャル) である．

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{q}=(\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_n)|\mathbf{q}_i=\mathbf{q}_j\} \tag{2}$$
$$\Delta = \cup_{i<j}\Delta_{ij} \tag{3}$$

とおく。U は $\mathbf{R}^{3n}\setminus\Delta$ 上の関数である。
常微分方程式の一般論より、与えられた初期値 $q(0)\in\mathbf{R}^{3n}\setminus\Delta,\ \dot{q}(0)\in\mathbf{R}^{3n}$ にたいして、唯一の解 $q(t)\ (0\leq t\leq\sigma)$ が存在する。ここで、$0<\sigma\leq\infty$ は極大なものとする。

定義 1.1. $\sigma<\infty$ なら、解 $\mathbf{q}(t)$ は σ において**特異性**を持つという。

目標は特異性を持つ解について理解することである。

定理 1.2 (Painlevé, 1895, [9])**.** $q(t)$ が σ において特異性を経験するなら、次が成り立つ.

$$\mathbf{q}(t)\to\Delta \quad \text{as} \quad t\to\sigma.$$

すなわち、$\rho(t)=\inf_{x\in\Delta}|q(t)-x|$ とおいたときに、$\lim_{t\to\sigma}\rho(t)=0$ となる。

証明. そうでないとする．すると、収束列 $t_n\to\sigma$ が存在して、$\rho(t_n)>c>0$ とできる．$\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\min_{i<j}|q_i-q_j|$ であることに注意すると、十分大きな M と十分小さな $\epsilon>0$ をとって、$|q-q(t_n)|<\epsilon(\exists n)$ となるすべての q に対して $\frac{\partial U}{\partial\mathbf{q}}<M, K<M$ と評価できる (K についてはエネルギー保存を用いた．)．常微分方程式の解の存在証明を思い出すと、$q(t_n)$ を初期値とする解の時間は少なくとも ϵ/M は延ばすことができた．この数は n に依らないので、特異性に矛盾している． □

* 2005 年度力学系理論勉強会「ハミルトン系の周期軌道と変分法」のレクチャーノート

定義 1.3. $\mathbf{q}(t)$ が σ において特異性をもつとする．この特異性が**衝突特異性**というのは、$q^* \in \Delta$ があって $t \to \sigma$ で $q(t) \to q^*$ のときである．それ以外のとき、特異性は**非衝突特異性**という．

I を慣性モーメントとする:

$$I = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{q}_i|^2$$

命題 1. σ を (衝突あるいは非衝突) 特異点とする．このとき $t \to \sigma$ のとき $\lim I \leq \infty$ が存在する．

証明.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 I}{dt^2} &= 2\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\rangle && (4)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}|\mathbf{p}|^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{q}_i, \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_i}\rangle && (5)\\
&= 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}|\mathbf{p}|^2 - 2U && (6)\\
&= 4H + 2U && (7)
\end{aligned}$$

この式 (Lagrange-Jacobi の公式という) と定理 1.2 より、t が σ に十分近いところでは $\ddot{I}$ は常に正となる。このことから I の極限の存在が容易に分かる。 □

定理 1.4 (Painlevé)**.** $n = 3$ ならすべての特異性は衝突特異性である．

証明の概略. q を非衝突特異性を持つとしよう．2 体近接では無限に大きな運動エネルギーは得られない．非衝突特異性を起こすには 3 体近接を無限回繰り返す必要がある．命題 1 から $\lim_{t\to\sigma} I = A$ が存在する．$A = 0$ ならば、衝突特異性である．$A \in (0, \infty]$ とする。一般に定数 a, b, c, d が存在して

$$\begin{aligned}
aU^{-1} < &r_{min} < bU^{-1}\\
cI^{1/2} < &r_{max} < dI^{1/2}
\end{aligned} \tag{8}$$

がなりたつ。ここで、$r_{min} = \min_{i<j} |q_i - q_j|, r_{max} = \max_{i<j} |q_i - q_j|$ である。したがって、t が σ に十分近ければ、定数 M がとれて、

$$r_{min} < \frac{1}{2}M < M < r_{max} \tag{9}$$

とできる．ここまでは一般の n でも成り立つ．
さて、3 体がなす三角形の三辺のうち r_{min}, r_{max} 以外のもう一辺の長さ r_{mid} は三角不等式より

$$r_{mid} \geq r_{max} - r_{min} > M - \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}M \tag{10}$$

と評価できる．
従って、3 体近接できない。 □

これから、$n \geq 4$ において非衝突特異性があり得るかという問題が起こる。

定理 1.5 (von Zeipel, 1908 [13, 7])**.** σ が特異点であって、$t \to \sigma$ のとき $\lim I < \infty$ なら σ は衝突特異点である．

証明の概略. $\lim I = A < \infty$ としよう.

$$\Lambda = \cap_{t<\sigma} \mathrm{cl}(q((t,\sigma))) \tag{11}$$

とする。cl は閉包である.

Λ の点で衝突する点同士で組に分けたとき、その組の数が最も少ないものを ω とする. その各組を $\mathbf{k}_l \subset \{1,\ldots,n\}$, $(l = 1,\ldots,p)$ とする。$c_{\mathbf{k}_l}$ を $\{q_h\}_{h\in\mathbf{k}_l}$ の重心とする. このとき

$$I_\omega = \sum_{l=1}^{p} \sum_{h\in\mathbf{k}_l} m_h |q_m - c_{\mathbf{k}_l}|^2 \tag{12}$$

とおく。命題 1 の証明のような計算を行うと I_ω の 2 階微分は組の重心同士の距離だけで決まり有界である. したがって、ω に近い間は I_ω は激しく変化はしない. しかし、もし Λ が 1 点集合でなければ、ω の近傍を取ったとき q はそこを激しく出たり入ったりする. 従って、I_ω は激しく変化して矛盾する. □

定理 1.6 (Mather & McGehee, 1975, [4]). 直線 4 体問題において、有限時間に非有界になる解が存在する。しかし、無限回の 2 体衝突を起こす。

証明の雰囲気. 直線 3 体衝突を McGehee の blow-up のテクニックを使って解析して行う. 近 3 体衝突を起こして激しいスピードで飛び出した 1 質点はもう一つの質点と衝突して戻ってきて、再び近 3 体衝突を起こしこれを繰り返す。 □

定理 1.7 (Gerver, 1991, [3]). 十分大きな N に対して、平面 $3N$ 体問題の非衝突特異性を持つ解が存在する.

証明の雰囲気. 最近の (20 世紀後半の) 理論は使わずに古典的なやり方でやられているらしい. 十分大きな N は explicit にはわからない. □

定理 1.8 (Xia, 1992, [12]). 空間 5 体問題において、非衝突特異性を持つ解が存在する。

この証明には [8] も参考になる. 次の節からは定理 1.8 の証明を行う.

2 空間二等辺三体問題

空間 3 体問題を考える. 運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i |\dot{\mathbf{q}}_i|^2 \tag{13}$$

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \tag{14}$$

である。ここで、$m_1 = m_2$ と仮定して、

$$\mathbf{q}_1 = (x,y,z), \mathbf{q}_2 = (-x,-y,z), \mathbf{q}_3 = (0,0,z_3) \tag{15}$$

に制限し, さらに重心は 0 として考える. これは、不変な部分空間である. この制限の下では、

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m(1+2\alpha)\dot{z}^2 \tag{16}$$

$$U = \frac{1}{2} m m_3 \left[\alpha(x^2+y^2)^{-1/2} + 4(x^2+y^2+(1+2\alpha)^2 z^2)^{-1/2}\right] \tag{17}$$

となる。ここで、$\alpha = m/m_3$ である。

$$M = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 2m(1+\alpha) \end{pmatrix} \tag{18}$$

とし、

$$\xi = M^{1/2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \eta = M^{1/2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \tag{19}$$

と変数変換する.

すると、この制限 3 体問題はハミルトン関数を

$$H = \frac{1}{2}|\eta|^2 - U(\xi) \tag{20}$$

とするハミルトン系となる．ただし、

$$U(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} m^{3/2} m_3 \left[\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2} + 4(\xi_1^2 + \xi_2^2 + (1+2\alpha)\xi_3^2)^{-1/2} \right] \tag{21}$$

である。運動方程式は

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \dot{\eta} = -\frac{\partial H}{\partial \xi} \tag{22}$$

である。

さて、3 体衝突近くの運動を理解するために変数変換を行っていく。以下の変数変換は McGehee や Devaney らによって得られたものである ([1, 2, 5, 6]).

$$r = |\xi|, \mathbf{s} = r^{-1}\xi, \mathbf{z} = r^{1/2}\eta \tag{23}$$

とし、さらに時間変数 t を $dt = r^{3/2} d\tau$ によって τ に変える．$' = \frac{d}{d\tau}$ と書く．すると、運動方程式 (22) は

$$r' = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})r, \tag{24}$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{z} - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})\mathbf{s}, \tag{25}$$

$$\mathbf{z}' = \frac{\partial U}{\partial \xi}(\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{z})\mathbf{z} \tag{26}$$

となる。

さらに変数変換を行っていく。$\mathbf{s}$ を曲座標で表示する:

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, \sin\phi) \tag{27}$$

基底

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{s} \tag{28}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \theta} = (-\sin\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \tag{29}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \phi} = (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, \cos\phi) \tag{30}$$

をとり、$\mathbf{z} = v\mathbf{u}_1 + w_2\mathbf{u}_2 + w_3\mathbf{u}_3$ と分解する．変数 $(r, \theta, \phi, v, w_2, w_3)$ によって方程式を書き直すと、

$$\begin{aligned} r' &= vr \\ \theta' &= w_2 \\ \phi' &= w_3 \\ v' &= \frac{1}{2}v^2 + w_2^2\cos^2\phi + w_3^2 - U(\phi) \\ w_2' &= -\frac{1}{2}vw_2 + 2w_2w_3\tan\phi \\ w_3' &= U'(\phi) - \frac{1}{2}vw_3 - w_2^2\cos^2\phi\tan\phi \end{aligned} \tag{31}$$

となる。ここで、$U(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2}}m^{3/2}m_3\left[\alpha\sec\phi + 4(1+2\alpha\sin^2\phi)^{-1/2}\right]$ である。
この右辺は θ を含まない．これは、z 軸に関する回転対称性と対応している．もともとの角運動量はこの変数では $c = r^{1/2}w_2\cos^2\phi$ と表され、これは運動の定数である．また、エネルギ h も定数であり、この変数では

$$\frac{1}{2}(v^2 + w_3^2 + w_2^2\cos^2\phi) - U(\phi) = rh \tag{32}$$

と書ける．
すでに三体衝突は $r = 0$ であり、これはもはや特異点ではない．しかし、まだ $\phi = \pm\pi/2$ が特異点として残っている．これは m_1 と m_2 の 2 体衝突に対応する．その特異性を除去するためにさらに変数変換をする．$w = w_3\cos\phi, u = w_2\cos^2\phi$ とおき、時間変数も $d\tau = \cos\phi ds$ によっておき直す．s による微分も同じく $'$ で表すと、次のようになる．

$$\begin{aligned} r' &= vr\cos\phi \\ \phi' &= w \\ v' &= U(\phi)\cos\phi - \frac{1}{2}v^2\cos\phi + 2rh\cos\phi \\ w' &= U'(\phi)\cos^2\phi - \frac{1}{2}vw\cos\phi - (2U(\phi) + 2rh - v^2)\sin\phi\cos\phi \\ u' &= -\frac{1}{2}vu\cos\phi \end{aligned} \tag{33}$$

この式が解ければ θ も得られるので省いた．エネルギー h は

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2 + u^2) - U(\phi)\cos^2\phi = rh\cos^2\phi \tag{34}$$

を満たす．これで、完全に特異点が除去できた．
さて、方程式 (37) は $r = 0$ でも定義されており、1 番目の式からそれは不変であることが分かる．そこで、まず $M = \{r = 0\}$ に制限して考えよう．これは、実際の質点の運動としては 3 体衝突でありその流れは意味をなさないが、M をよく調べることによって r 小さいときの振る舞い、つまり 3 体が近接したときの質点の運動を知ることができる．方程式は

$$\begin{aligned} \phi' &= w \\ v' &= U(\phi)\cos\phi - \frac{1}{2}v^2\cos\phi \\ w' &= U'(\phi)\cos^2\phi - \frac{1}{2}vw\cos\phi - (2U(\phi) - v^2)\sin\phi\cos\phi \\ u' &= -\frac{1}{2}vu\cos\phi \end{aligned} \tag{35}$$

となる。エネルギー関係式から、

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi+w^2+u^2)-U(\phi)\cos^2\phi=0 \tag{36}$$

である。
ここで、さらに $M_0 := u=0 \subset M$ も不変であることが分かるので M_0 に制限して考える．これは角運動量が 0 であることを意味し、従って平面二等辺三体問題となる．

$$\begin{aligned}\phi' &= w\\ v' &= U(\phi)\cos\phi-\frac{1}{2}v^2\cos\phi\\ w' &= U'(\phi)\cos^2\phi-\frac{1}{2}vw\cos\phi-(2U(\phi)-v^2)\sin\phi\cos\phi\end{aligned} \tag{37}$$

エネルギー関係式は

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi+w^2)-U(\phi)\cos^2\phi=0 \tag{38}$$

となった。M_0 上の流れは分かりやすい．式 (38) が表す曲面は位相的には 2 次元球面から 4 点を除いたものである (Xia の論文の図 1 参照)．さらに注目したいのはエネルギー関係式を用いると

$$v'=\frac{1}{2}w^2\sec\phi\geq 0 \tag{39}$$

が導かれ、軌道に沿って v が増加することである．
さて、この不動点は以下の 6 点ある。座標は (w,ϕ,v) の順で書く。

$$\begin{aligned}E_+^* &= (0,\phi_0,\sqrt{2U(\phi_0)})\\ E_+ &= (0,\phi_0,-\sqrt{2U(\phi_0)})\\ E_-^* &= (0,-\phi_0,\sqrt{2U(\phi_0)})\\ E_- &= (0,-\phi_0,-\sqrt{2U(\phi_0)})\\ C^* &= (0,0,\sqrt{2U(0)})\\ C &= (0,0,-\sqrt{2U(0)})\end{aligned} \tag{40}$$

である。ここで、$\phi_0>0$ は $U'(\phi_0)=0$ を満たすものである (正の範囲ではただ一つある)．
もともとの質点の配置としては E_+^*, E_+, E_-, E_-^* は正三角形 (m_3 の上下で 2 種類 ($+$ と $-$) でてくる)、C^*, C は一直線に並ぶ配置を表す．今は質点の速度も同時に考えているのでこれらは 2 種類 ($*$ が有るのと無いの) ずつでてくる．
これらの局所構造は線形化して調べると (v の振る舞いからもだいたい分かるが) E_+^*, E_+, E_-, E_-^* は saddle であり、C は source, C^* は sink である。
後で、E_+ の不安定多様体の情報が必要となる．いま、それは 2 つの曲線 γ^+, γ^- からなる。γ^+ を E^+ の近傍で w 成分が負となる方、γ^- を正となる方としよう ($\pm$ と w の正負は一致しないことに注意)．さて、γ^+, γ^- の振る舞いには、いずれ $\phi=\pi/2$ の arm を上っていく、C^* に近づく, かなり特殊だが $E+^*$ に近づくなどの可能性がある．それが、どうなるかということは質点の質量比に依存するが、多くの場合 (全てであろうと予想されているほど) は γ^+ は $\phi=\pi/2$ の arm をのぼり、γ^- は $\phi=-\pi/2$ の arm をのぼることが分かっている ([1, 10])．そのようになる質量比を allowable と呼ぶ．以下、質量比は allowable であると仮定する．対称性から E_- の不安定多様体、$E_\pm^*$ の安定多様体も同様のことが分かる．

さて、M について考えよう．つまり、$u=0$ という制限をなくす．ところが (37) をみると u は最初の 3 式に含まれていない．よって ϕ, v, w について解けば、u についてはエネルギー関係式より、

$$u = \pm\sqrt{2U(\phi)\cos^2\phi - (v^2\cos^2\phi + w^2)} \tag{41}$$

として得られる．
$u \neq 0$ ならば、

$$\frac{1}{2}(v^2\cos^2\phi + w^2) - U(\phi)\cos^2\phi < 0 \tag{42}$$

となり、これは M_0 の内部だと考えればよい。そして、その各点に対して u の値としては 2 点が対応する．$\{u=0\}$ が不変であったことから、$\{u \leq 0\}$, $\{u \geq 0\}$ も不変である．これらのことから、M は M_0 の内部を 2 つ用意して、その境界 M_0 でその 2 つを張り合わせたものを考えればよい．
では、M の flow を調べよう．M でも同様に $v' \geq 0$ である。不動点は M_0 にある 6 点だけである．それらの点におけるベクトル場を線形化して、固有値を計算することは容易にできる．すると、再び C は source, C^* は sink であることが分かる．E_+ に関しては M_0 に安定方向と不安定方向が 1 次元ずつあったが、M においては不安定方向が 2 次元になる．さて、γ^+, γ^- は不安定多様体に含まれ、それぞれ $\phi = \pi/2, \phi = -\pi/2$ の arm を上っていくのであった．したがって、その近傍の M の点もその arm を上っていく．それは、物理的には m_3 が m_1, m_2 から離れていくことを表している．さて、この m_1, m_2 の極限の振る舞いを調べたいが, 角運動量 c_{12} は 0 なので役に立たない．そこで、離心率 w_{12} を考えよう．離心率には

$$w_{12} = |h_{12}c_{12}|c_{12} \tag{43}$$

という関係が成り立つ (Kepler 問題に詳しい力学の本参照、例えば [11])．h_{12} は m_1, m_2 のエネルギーである。

補題 1. *M の任意の軌道 γ で 2 本の arm のどちらかを駆け上がるものを考える。τ_0 に対して $w_{12}(\gamma(\tau_0)) \neq 0$ なら、すべての τ に対して $w_{12}(\gamma(\tau)) \neq 0$ である．さらに、$\tau \to \infty$ のときの極限 $\lim w_{12}(\gamma(\tau))$ が存在して*

$$w_{12}^{\infty}(\gamma) = \lim_{r\to\infty} w_{12}(\gamma(\tau)) \neq 0. \tag{44}$$

証明の概略. M は $h=0$ に制限したものと同じ構造を持つことをみると、衝突でなく実際の軌道として考えられる．その様子を考えればよい．角運動量は保存され、離心率の下限は角運動量で抑えられることによる． □

さて、$v' \geq 0$ より M において $\mathrm{Un(E+)} \cap \{\mathrm{v} = 0\}$ は閉曲線である．従って、$\mathrm{Un(E_+)}$ の各軌道と S^1 を対応させることができる．その対応 ψ を $\psi(\gamma^-) = 0, \psi(\gamma^+) = \pi$ とすることができる．$\gamma^{\pm}$ において w_{12} の極限は 0 でなく、C^* へ収束する軌道に対しては 0 になるから、$w_{12}^* > 0$ と ψ_1^*, ψ_2^* が存在して、$|w_{12}^{\infty}|$ は 2 つの区間の両端点において値 w_{12}^* をとり、すべての $\psi \in [-\psi_1^*, \psi_1^*] \cup [\pi - \psi_2^*, \pi + \psi_2^*]$ [*1]に対して $|w_{12}^{\infty}(\psi)| \geq w_{12}^*$ [*2]となる。

3 非衝突特異点の存在

5 体問題において, 2 種類の 3 体衝突を前節の手法によりブローアップする．無限回振動しながら 2 つの衝突多様体に接近する軌道が, 非衝突特異点に対応する．詳しくは, [12] を参照.

[*1] Xia の論文では ∪ を ∩ に書き間違えている．
[*2] Xia の論文では不等号が逆になっている．

参考文献

[1] R. Devaney, Triple collision in the planar isosceles three-body problem, *Inv. Math.* **60** (1980), 249-267.

[2] R. Devaney, Singularities in classical mechanical systems, in *Ergodic Theory and Dymanical Systems*, A. Katok, ed., Birkhäuser, Boston, 1981.

[3] J. Gerver, The existence of pseudocollisions in the plane, Journal of Differential Equations 89(1991), 1-68.

[4] J.N. Mather and R. McGehee, Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time , Lecture Notes in Physics 38(1975), 573-597

[5] R. McGehee, Singularities in classical celestial mechanics, in *Proc. of Int'l Congress of Mathematicians*, Helsinki, 1978, pp.827-834.

[6] R. McGehee, Triple collision in the collinear three-body problem, *Invent. Math.* **27** (1974), 191-227.

[7] Richard McGehee, Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics , Exposiones Mathematicae 4(1986), 335-345.

[8] G. Saari and Z. Xia, Off to infinity in finite time, Notice of the AMS, 42(1995), p538-546.

[9] C. L. Siegel and J. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

[10] C. Simó, Analysis of triple-collision in the isosceles problem, in *Classical Mechanics and dynamical Systems*, Marcel Dekkar, New York, 1980.

[11] 戸田盛和、一般力学 30 講、朝倉書店、1994.

[12] Zhihong Xia, The existence of noncollision singularities in newtonian systems , Annals of Mathematics 135(1992), 411-468.

[13] H. von Zeipel, Sur les singularités du problème des n corps, *Arkiv für Mat., Astr. och Fysik* **32** (1908), 1-4.